



TITLE:

音圧応答低減を目的とした多孔質
材料を含む吸遮音構造物の最適化(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

山本, 崇史

CITATION:

山本, 崇史. 音圧応答低減を目的とした多孔質材料を含む吸遮音構造物の最適化. 京都大学, 2008, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2008-11-25

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r12274>

RIGHT:

音圧応答低減を目的とした 多孔質材料を含む吸遮音構造物の最適化

2008 年 11 月

山 本 崇 史

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	多孔質体のモデル	2
1.3	音圧レベルの最小化を目的としたトポロジー最適化	3
1.4	本論文の目的と構成	4
第 2 章	多孔質材料のモデル	7
2.1	等価流体	8
2.2	構成式・運動方程式	19
第 3 章	数値解法と実験的検証	27
3.1	有限要素法による解法	28
3.2	伝達マトリックスを適用した近似解法	34
3.3	実験検証	42
3.4	数値例による提案手法の検証	46
3.5	まとめ	49
第 4 章	最適設計手法	51
4.1	構造最適化	51
4.2	トポロジー最適化	52
4.3	トポロジー最適化と板厚分布最適化	56
第 5 章	多孔質材料の板厚分布最適化	59
5.1	定式化	59
5.2	数値例による提案手法の検証	64
5.3	まとめ	70
第 6 章	多孔質材料のトポロジー最適化	81
6.1	定式化	81
6.2	数値例による提案手法の検証	95

6.3	まとめ	115
第 7 章	結論	117
7.1	本論文の総括	117
7.2	今後の展開と課題	118
参考文献		121
関連学術論文		126
国際会議発表論文		126
口頭発表論文		127
受賞		127
特許		128
索引		129

目次

2.1	Poroelastic material for sound absorption.	7
2.2	Biot's model for poroelastic material.	8
2.3	Circular straight tube.	9
2.4	Velocity distribution in the section of a circular straight tube ($R = 100 \mu\text{m}$). . . .	13
2.5	Circular slanted tube.	14
2.6	Schematic view of mixture of the homogenized solid and fluid.	19
2.7	Inertial coupling between solid and fluid phase.	23
3.1	Coupled system.	27
3.2	Transfer matrix of poroelastic material.	39
3.3	Boundary conditions for coupled system.	40
3.4	Analyzed coupled system.	42
3.5	Schematic view of testrig.	43
3.6	Set up of measurement.	44
3.7	Cradle for steel panel to be clamped.	45
3.8	Inside view of testrig.	45
3.9	Finite element model for testrig.	46
3.10	Frequency response of flat bare panel.	47
3.11	Frequency response of flat panel glued with poroelastic material.	47
3.12	Frequency response of flat panel unglued with poroelastic material.	48
3.13	Frequency response of flat panel unglued with poroelastic material.	48
3.14	Frequency response of flat panel glued with poroelastic material.	49
4.1	Example of beam clamped at an end and loaded at the other end.	51
4.2	Sizing optimization.	51
4.3	Shape optimization.	52
4.4	Topology optimization.	52
4.5	Characteristic function χ related to material distribution.	53

4.6	Topology optimization based on homogenization approach.	54
4.7	Layered microstructure.	54
4.8	Topology optimization based on density method.	55
4.9	Optimal reinforced circular plate [1]. (a) 150 elements, (b) 200 elements, (c) 250 elements, (d) 300 elements were used.	56
4.10	Relaxation by microscopically ribbed plate.	57
4.11	Relaxation by variable thickness sheet.	57
5.1	Objective coupled system.	60
5.2	Flowchart of the optimization procedure.	63
5.3	Analyzed coupled system.	65
5.4	Initial thickness distribution of poroelastic layer.	66
5.5	Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower). Dashed line shows the response in the bare panel and solid line shows the response in the initial uniform thickness.	67
5.6	Spectrum of objective function for the initial thickness (solid line) and reference spectrum when the multilayered structure is removed (dashed line). Target frequency ranges including a spectrum peak to be minimized are highlighted. The first covers from 45 Hz to 70Hz; the second from 340 Hz to 365 Hz.	68
5.7	Optimal thickness distribution for the optimization in the frequency range from 45 Hz to 70 Hz.	69
5.8	Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower). Dashed line shows the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 45 Hz to 70 Hz.	69
5.9	Deflection shapes of flat steel panel using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 58 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 51 Hz.	71
5.10	Deflection shapes of elastic cover layer using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 58 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 51 Hz.	72
5.11	Deflection shapes of flat steel panel and elastic layer at a section area: dashed line corresponds to the initial uniform thickness at 58 Hz and solid line to the optimal thickness distribution at 51 Hz.	73
5.12	Optimal thickness distribution for the optimization in the frequency range from 340 Hz to 365 Hz.	74

5.13	Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower). Dashed line shows the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 340 Hz to 365 Hz.	74
5.14	Deflection shapes of flat steel panel using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 346 Hz.	75
5.15	Deflection shapes of elastic cover layer using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 346 Hz.	76
5.16	Deflection shapes of flat steel panel and elastic layer at a section area: dashed line corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and solid line to the optimal thickness distribution at 346 Hz.	77
5.17	Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower) obtained by finite element solution. Dashed line shows the the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 45 Hz to 70 Hz.	77
5.18	Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower) obtained by finite element solution. Dashed line shows the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 340 Hz to 365 Hz.	78
5.19	Deflection shapes of flat steel panel using finite element representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 348 Hz.	79
5.20	Deflection shapes of elastic cover layer using finite element representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 348 Hz.	80
6.1	Material representation based on elastic elements.	82
6.2	Material representation based on acoutic elements.	82
6.3	Material representation using mixed formulation.	82
6.4	Material representation based on poroelastic elements.	82
6.5	Unified material representation based on poroelastic elements.	83
6.6	Schematic representation of material interpolation using fictitious poroelastic material. The left and right diagrams represent a poroelastic material equivalent to air and an elastic material, respectively. The center diagram shows an actual poroelastic material.	85

6.7	Flowchart of optimization procedure.	91
6.8	One-dimensional acoustic tube model with rigid plate.	96
6.9	Equivalent bulk modulus and densities accounting for viscous damping and thermal dissipation. Solid and dashed lines correspond to real and imaginary parts, respectively.	97
6.10	Spectra of the objective function for one-dimensional model; the fixed design domain is filled with air (solid gray line) or poroelastic material equivalent to air (break line).	98
6.11	A-weighting function.	99
6.12	Optimal topology of polyurethane foam for one-dimensional model.	99
6.13	Distribution of the dissipated power at the initial state for one-dimensional model.	100
6.14	Spectra of the objective function for the optimal topology of polyurethane foam for one-dimensional model.	100
6.15	Spectra of the objective function when the fixed design domain is filled with olefin sheet (solid gray line) or poroelastic material equivalent to olefin sheet (break line).	101
6.16	Resultant topology of polyurethane foam and olefin sheet for one-dimensional model in cases (a) and (b) when all the penalization powers are set to 3.0.	102
6.17	Resultant topology of polyurethane foam and olefin sheet for one-dimensional model in cases (a) and (b) when the penalization powers p_1 and p_2 are raised to 6.0.	103
6.18	Spectra of the objective function for the optimal topology of polyurethane foam and olefin sheet.	104
6.19	Resultant topology of polyurethane foam and olefin sheet for one-dimensional model in cases (a) and (b) when the penalization powers q_1 , q_2 , r_1 and r_2 are set to 1.0.	105
6.20	Example Model-1 consisting of an elastic flat panel coupled with an acoustic cavity.	105
6.21	Spectra of the objective function when design domain of Model-1 is filled with air.	106
6.22	Distribution of the dissipated power for Model-1 at the initial state in cases (a) and (b).	106
6.23	Optimal topology of poroelastic material for Model-1 in cases (a) and (b).	106
6.24	Resultant topology of poroelastic material for Model-1 in case (a) when penalization parameters q_1 and r_1 are set to 1.0.	107
6.25	Spectra of the objective function for Model-1 when optimal topology of poroelastic material is applied.	107

6.26	Distribution of dissipated power at initial state for Model-1 in cases (a) and (b) when polyurethane foam and compressed felt are applied as material 0 and 1, respectively.	107
6.27	Optimal topology of Model-1 in cases (a) and (b) when polyurethane foam and the compressed felt are applied as material 0 and 1, respectively. Blue areas correspond to polyurethane foam, red areas to compressed felt.	108
6.28	Spectra of objective function for the optimal topology in Fig. 6.27. Solid and dashed lines respectively represent spectra in cases (a) and (b). Solid gray line shows spectrum when design domain is filled with air, for reference.	108
6.29	Example Model-2 where the domain for the elastic cover of Fig. 6.20 is included in the fixed design domain.	109
6.30	Optimal topology of poroelastic material and elastic material for Model-2 in cases (a) and (b). Color bar at the bottom of the figure indicates interpolated material, with blue corresponding to air, green to polyurethane foam, and red to olefin sheet.	109
6.31	Optimal topology for Model-2 in case (c) where target frequency ranges in cases (a) and (b) are unified. Color bar at the bottom of the figure indicates interpolated material, with blue corresponding to air, green to polyurethane foam, and red to olefin sheet.	110
6.32	Spectra of the objective function for Model-2 when optimal topology shown in Figs. 6.30 and 6.31 are applied.	110
6.33	The comparisons of spectra for objective function in cases (a) and (b), when air, polyurethane foam, and olefin sheet are applied. Solid and dashed lines respectively represent spectra for Model-1 and Model-2.	111
6.34	Optimal topology for Model-2 in cases (a), (b) and (c) when polyurethane foam, compressed felt, and olefin sheet are respectively applied as material 0, 1, and 2. Color bar at the bottom of the figure indicates interpolated material, with blue corresponding to polyurethane foam, green to compressed felt, and red to olefin sheet.	112
6.35	Spectra of the objective function when the optimal topology shown in Fig. 6.34 is applied. Solid, dashed, and dotted lines respectively represent spectra in cases (a), (b) and (c).	113
6.36	The comparisons of spectra for objective function in cases (a) and (b), when polyurethane foam, compressed felt, and olefin sheet are applied. Solid and dashed lines respectively represent spectra for Model-1 and Model-2.	114

表目次

3.1	Parameters for polyurethane foam and olefin sheet.	46
6.1	Characteristics for poroelastic materials equivalent to air and elastic material. . .	86
6.2	Parameters for fictitious poroelastic materials equivalent to air and olefin sheet. .	96

記号一覧

1. Material properties and characteristics

$(\cdot)^*$	Complex conjugate
j	Imaginary unit
f	Frequency
ω	Angular frequency
E^s	Young's modulus
ρ^s	Mass density
η^s	Loss factor
ν^s	Poisson's ratio
λ^s, μ^s	Lame's constant
K^s	Apparent bulk modulus of solid phase
K^b	Material bulk modulus of solid phase
K^f	Bulk modulus of fluid phase
ρ_{11}	Density with inertial coupling for solid phase
ρ_{22}	Density with inertial coupling for fluid phase
ρ_{12}	Density with inertial coupling
ρ^{sc}	Density with inertial coupling and viscous damping for solid phase
ρ^{fc}	Density with inertial coupling and viscous damping for fluid phase
ρ^{cc}	Density with inertial coupling and viscous damping
ρ	Equivalent density
μ	Viscosity
ν	Kinematic viscosity
ν'	Thermal diffusivity
Pr	Prandtl number

γ	Heat capacity ratio
P_0	Atmospheric pressure
ρ_0	Mass density of air
c_0	Speed of sound in air
P, Q, R	Modified bulk modulus
G	Characteristic function for viscous damping
G'	Characteristic function for thermal dissipation
$\alpha, \tilde{\gamma}$	Coupling coefficient
ϕ	Porosity
σ	Air flow resistivity
α_∞	Tortuosity
Λ	Viscous characteristic length
Λ'	Thermal characteristic length

2. Physical quantities

x_i	Coordinate value
δ_{ij}	Kronecker's delta function
σ_{ij}^e	Stress for elastic material
σ^a	Stress for air
σ_{ij}^s	Stress for solid phase in air
σ^f	Stress for fluid phase
σ_{ij}^p	Stress for poroelastic material
$\hat{\sigma}_{ij}^s$	Stress for solid phase in vacuo
ε_{ij}^e	Strain for elastic material
ε_{ij}^a	Strain for air
ε_{ij}^s	Strain for solid phase
ε_{ij}^f	Strain for fluid phase
u_i^e	Displacement for elastic material
u_i^a	Displacement for air
u_i^s	Displacement for solid phase
u_i^f	Displacement for fluid phase
u_n^e	Normal displacement for elastic materia

u_n^a	Normal displacement for air
u_n^s	Normal displacement for solid phase
u_n^f	Normal displacement for fluid phase
p^a	Pressure in air
p^f	Pressure in fluid phase
ψ^a	Velocity potential in air
ψ^f	Velocity potential in fluid phase
f_i^e	External force

3. Physical quantities in matrix form

U_e	Displacement vector for elastic material
U_s	Displacement vector for solid phase
Ψ_a	Velocity potential vector for air
Ψ_f	Velocity potential vector for fluid phase
V_e	Adjoint displacement vector for elastic material
V_s	Adjoint displacement vector for solid phase
Φ_a	Adjoint velocity potential vector for air
Φ_f	Adjoint velocity potential vector for fluid phase
F_e	External force vector
M_e	Mass matrix for elastic material
M_a	Mass matrix for air
M_s	Mass matrix for solid phase
M_f	Mass matrix for fluid phase
K_e	Stiffness matrix for elastic material
K_a	Stiffness matrix for air
K_s	Stiffness matrix for solid phase
K_f	Stiffness matrix for fluid phase
C_{ea}	Coupling matrix between elastic material and air
C_{sa}	Coupling matrix between solid phase and air
C_{vl}	Coupling matrix between solid phase and volume phase
D	Dynamic stiffness matrix
N_t	Interpolation function

Π_i	Input power
Π_d	Dissipated power

4. Optimization

\mathbf{x}	Positioning vector
χ	Characteristics function
$\boldsymbol{\mu}_i$	Design variable vector for material i
μ_{ij}	Discretized design variable for material i
Ω^D	Extended design domain
Ω^d	Optimal design domain
p_i, q_i, r_i	Penalization power for material i
F	Objective function
F_ω	Spectrum of objective function at angular frequency ω
w	Weighting function
V_i	Volume for material i
V_{i0}	Upper bound of volume constraint for V_i

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

自動車に乗車中の人の快適性を向上させる要素として、車室内の静粛性は近年ますます重要になってきている。静粛性を向上させる手段の一つとして、車体構造と車室内音場の境界面上に、通常は吸遮音材を配置する。吸遮音材は、厚さ数 mm から数十 mm の多孔質体や弾性体などを二層以上積層させた構造となっており、100 Hz 程度の低い周波数から 10 kHz 以上の高い周波数まで、広い周波数域にわたり車室内の音圧レベルを低減する効果がある。静粛性に対する要求を満たすため、ウインドシールドとサイドウインドウ以外のほぼ全ての境界面に吸遮音材は用いられており、設計要素としての重要性は非常に高い。

一方、環境保護の観点から自動車の燃費改善が大きな課題となっている。車両重量の軽量化は燃費の向上に対して効果が大きいので、軽量化は自動車の設計において欠かせない検討項目である。吸遮音材についても、合計で車両重量の数%を占めていることから、軽量化の要求は高まりつつある。しかし、静粛性の向上と軽量化は、ほとんどの場合において相反する要求となる。したがって、同時に満足させる設計解を得るためには、吸遮音材の静粛性に対する効果を予測し、最適設計手法を援用することが不可欠である。

車室内の静粛性に対する吸遮音材の効果を予測する手法としては、高い周波数域で有効な、統計的エネルギー解析手法 (Statistical Energy Analysis, SEA) や音線法がある。また、それらに遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, GA) や勾配法などの最適化手法を適用することで、区分領域ごとの材料およびその厚さについて最適設計する手法が提案されている [2] [3]。一方、低周波数域に関しては、SEA や音線法の適用が、その理論上の制約から難しく、吸遮音材の効果を予測する有効な手法すら確立されていない。また、最適設計手法の検討については全くなされていないのが現状である。

だが、吸遮音材が低周波数域で静粛性に対して効果がないわけではない。低周波域では、吸遮音材の音響特性よりはむしろ、その構造特性が静粛性に対する効果を決める要素となる。すなわち、吸遮音材が車体構造パネルの振動と連成し、パネルに減衰要素として作用して制振したり、振動モードを変えたりすることで車室内音場の体積変化を抑え、静粛性を向上させるのである [4]。しかし、構造パネルと吸遮音材の組合せが悪いときには、構造パネルの振動が吸遮音材により増幅され、車室内の静粛性が損

なわれる恐れがある。したがって、吸遮音材のさらなる軽量化と車室内の静粛性の向上を両立させるためには、低周波域においても、吸遮音材の静粛性に対する効果を予測する有効な手法、およびその手法に適用可能な最適設計法が必要となる。

構造の最適設計手法は、寸法最適化、形状最適化およびトポロジー最適化の三種に大別されるが、性能を大きく改善できる可能性があるのはトポロジー最適化である。トポロジー最適化は、Bendsøe と Kikuchi [5] により提唱されて以来、構造物のトポロジーすなわち形態を設計する手法として多くの問題に適用されている。当初は、弾性体構造物の平均コンプライアンスの最小化 [6] や、低次固有振動数の最大化 [7] [8] を目的に適用されてきたが、近年では、多様な物理現象に対して応用されており [9] [10]、音圧レベルの最小化の問題についても報告されている。

以下では、まず吸遮音材の構成要素である多孔質体の計算モデルと、音圧レベルの最小化を目的としたトポロジー最適化手法に関して、過去の研究の流れをまとめ、本研究の目的とその位置付けを明確にする。

1.2 多孔質体のモデル

多孔質体である吸音材は、固体相と流体相が混在する二相材料で、弾性体としての構造的特性と、流体としての音響的特性をあわせ持っているが、高い周波数域で顕著に現れる音響的特性のみ着目し、これまでモデル化が検討されてきた。当初は音響表面インピーダンスとしてモデル化され、その値は Kundt 管 [11] あるいは自由音場 [12] で同定されていた。しかし、この値は材料の厚さに依存するため、厚さが変わるとに逐一同定する必要がある。1965 年には Delany と Bazley [13] が材料固有の特性インピーダンスと伝播係数でモデル化し、これらの値を空気流れ抵抗をパラメータとする実験式を導入した。このモデルは簡潔な表現ながら広い周波数で精度良く予測できるため広く適用された。また後には、Utsuno ら [14] により背後空気層付の Kundt 管を用いて、特性インピーダンスと伝播係数が直接同定できるようになった。これらの音響的なモデルは、無限大の大きさを仮定した積層構造物の遮音性能や、剛壁を背後境界条件にした場合の垂直入射吸音率の予測に適用されていたが、1962 年に Lyon ら [15] によって提案された統計的エネルギー解析手法の発展にともない、これらのモデルが組み込まれ、高周波数域での音圧レベルの予測に用いられるようになった。

前述のように、音響的特性のみ着眼したアプローチとは異なり、多孔質体の弾性体としての構造特性にも着目したモデル化が Biot [16] [17] によって 1956 年に提案されている。Biot のモデルでは、多孔質体中の固体相と流体相およびそれら二相間の連成挙動に着目し、多孔質体材料の運動方程式と構成式を導いている。当初は水で満たされた土壌内を伝播する地震波の解析のために考案されたものであるが、後に Allard [18] らによって、吸音材のような空気で満たされた音響材料内を伝播する音波の解析にも展開されてきた。モデルの細部には改善が加えられてきているが、基本とする運動方程式や構成式は Biot が提案したものから変わっていない。その後、Kang と Bolton [19], Easwaran ら [20], あるいは Attala ら [21] によって、多孔質体の平衡方程式に有限要素法が適用され、任意の形状および境界条件を考慮した多孔質体の数値解析が可能になった。しかし、運動方程式の係数が周波数の関数になっているため、周波数応答を求めるためには直接解法を用いる必要がある。したがって、モデル規模が大

きくなるにつれて必要な計算資源は急激に増加する。この点をいかに対処するかが常に課題となるが、本質的な解決手法はないのが現状である。

1.3 音圧レベルの最小化を目的としたトポロジー最適化

ここではトポロジー最適化を用いて、音響空間内の音圧レベルの改善を図る設計手法に限定して、これまでの発展の歴史を概観する。

トポロジー最適化は、1988年に Bendsøe と Kikuchi [5] により提唱されて以来、構造物の形態を設計する手法として多くの問題に適用されている。構築されてきた理論と応用例は Bendsøe と Sigmund [22] の著書に詳細に記述されている。Bendsøe と Kikuchi により提唱された直後の 1990 年代には、弾性体からなる構造物の固有振動数や固有モードなどの動的特性を目的関数にし、構造物のトポロジーを最適化する手法を提案している。Diaz と Kikuchi [7] あるいは Ma ら [8] は構造物の低次固有振動数を最大化するトポロジー最適化手法を提案している。また、Ma ら [8] は調和振動を仮定し、構造物の動的平均コンプライアンスを最小化するトポロジー最適化手法を提案している。

近年になって、構造物周囲の音場を考慮に入れたトポロジー最適化手法が検討されはじめた。Yoon ら [23] は弾性体からなる構造物と閉空間音場の連成系を対象に、音場内での指定領域内における平均二乗音圧を最小にする構造物の最適設計手法を提案している。Du と Olhoff [24] は、弾性体構造物から開空間に放射される音響パワーの最小化を目的とした、構造物のトポロジー最適化を提案している。ただし、構造物から放射される音波は平面波と仮定し、構造物表面における振動速度の二乗和により音響パワーを求めている。また、弾性体からなる構造物は含まずに、音源を内部に持つ音響空間を対象に、音場のトポロジー最適化も検討されている。Dühring [25] [26] は、剛壁に囲まれた矩形の音響空間内部において、指定領域内における平均二乗音圧を最小化する手法を提案している。Wadbro と Berggren [27] は、ホーンを対象にして、音ができるだけ効率良く外部開空間に放射されるよう、ホーン内部の音響空間を設計する手法を示している。Jensen と Sigmund [28] は、消音器出口の音圧レベルを最小化することを目的に、消音器内部の形態を設計する手法を提案している。これらの手法は、弾性体構造物あるいは音響空間の固有振動数を対象周波数域から離したり、対象周波数域における構造物の振動モードの波長を短くして音響放射効率を低減することで、音圧レベルの低減を実現している。

音圧レベルを低減する別の方法として、前述したように多孔質体を含む吸遮音材を付加する方法がある。吸遮音材は、低周波数域から高周波数域まで広い周波数範囲にわたって、音圧レベルを低減する効果がある。したがって、弾性体構造物あるいは音響空間の固有振動数を対象周波数範囲外に移動することができない場合には、吸遮音材を付加する方法は非常に有効である。自動車などの工業製品の設計においても、吸遮音材はすでに不可欠な要素になっており、実際の設計では、両方の手法を用いて音圧レベルの低減を図っている。しかし、吸遮音材が基本的には、多孔質体や弾性体などを二層以上積層させた構造になっていることに変わりはなく、現在でもこの構造を基本として設計している。

多孔質体を含む吸遮音材の構造を抜本的に見直し、力学および数学的見地に基づき合理的に性能を改善するためには、トポロジー最適化手法の適用が有効と考えられる。しかし、これに関しては近年検討が始まったばかりである。2007年に Lee ら [29] は、Biot のモデルから導出した多孔質体の伝達マ

トリックスを応用し、遮音性能の最大化を目的とした、多孔質体のトポロジー最適化手法を提案している。また、続けて Lee ら [30] は垂直入射吸音率の最大化を目的とした多孔質体のトポロジー最適化手法も提案している。しかしながら、これらの手法はいくぶん限定的で、遮音性能あるいは吸音性能のいずれか一方を対象としている。そのため、設計された多孔質体を実際の構造物に適用した場合、最終的な音圧レベルが低減される保証はない。

1.4 本論文の目的と構成

自動車などにおいて静粛性と燃費改善の要求は今後も変わることはなく、より高い次元での両立を求められる。したがって、吸遮音構造物においても性能向上と軽量化の要求は高まっていき、より高度な解析および設計手法が要求されるものと推測する。

本論文においては、吸遮音構造物を含んだ車体構造・車室内音場のような大規模な系においても適用可能な、新たな近似計算手法を提案する。また、その手法を利用した吸遮音材の板厚分布の最適設計法を構築する。さらに、吸遮音構造を抜本的に改善し、性能を飛躍的に向上させることを目的として、吸遮音構造物のトポロジー最適化手法を構築する。それぞれの提案手法において、いくつかの簡単な数値例を示しその有効性を検証する。

本論文は7章で構成されており、次章以下の概要を示す。

第2章「多孔質材料のモデル」では、吸音材のような多孔質体のモデルとして本研究で用いている Biot のモデルについて概略を説明する。まず多孔質体の基本構成要素として微小円管を想定し、管内を伝播する音波において重要となる空気の粘性、および圧縮・膨張に伴い発生する熱の管壁への散逸の考慮の仕方について、理論的な側面から述べる。次に、固体相と流体相が混在する二相材料の構成式および運動方程式について説明する。流体相の運動方程式については、変位で表現したものと、近年広く適用されており本研究でも適用している圧力で表現したものについて述べる。

第3章「数値解法と実験検証」では、第2章で述べた多孔質体の支配方程式の数値解法について述べる。まず、汎用的な手法である有限要素法による解法を説明する。あわせて多孔質体における散逸エネルギーの表現式を導出しておく。また、吸音材については Biot のモデルの妥当性を実験検証した例は少ないため、Biot のモデル適用した場合の計算結果を実験値と比較することで、モデルの妥当性を確認する。次に、多孔質体のヘルムホルツ方程式の基本解を適用して導出した吸遮音構造物の伝達マトリックスを用い、計算の精度と時間をバランスさせた新しい近似計算手法を提案する。そして、有限要素法による計算結果と提案する近似計算手法の結果を比較し、提案手法の有効性と適用可能な範囲を検証する。

第4章「最適設計手法」では、構造最適化手法の類別とその特徴について概説した後、本論文で用いているトポロジー最適化の基本的な考え方とその方法について説明する。また、弾性体薄板構造物の板厚分布の最適化はトポロジー最適化と類似しており、同じ考え方が適用できることを説明する。

第5章「多孔質材料の板厚分布最適化」では、第3章で提案した多孔質体を含む積層型の吸遮音構造物に対する近似計算手法に対し、トポロジー最適化の考え方を適用し、音圧応答レベルの最小化を目的とした板厚分布の最適化手法を提案する。そして、簡単な数値例によりその有効性を検証する。

第6章「多孔質材料のトポロジー最適化」では、従来の吸遮音構造物の前提であった積層型構造という制約を取り除き、吸遮音構造を抜本的に見直すことを目的に、多孔質体を含む吸遮音構造物を対象とした新しいトポロジー最適化手法を提案する。本手法では、従来構造の基本であった積層型という前提から脱却して、設計の自由度を上げ、性能の改善と軽量化の要求をともに満足する構造を創出する。ここでも、簡単な数値例により提案手法の有効性を検証する。

第7章「結論」では、本研究で得られた成果と今後の展開・課題をまとめる。

第 2 章

多孔質材料のモデル

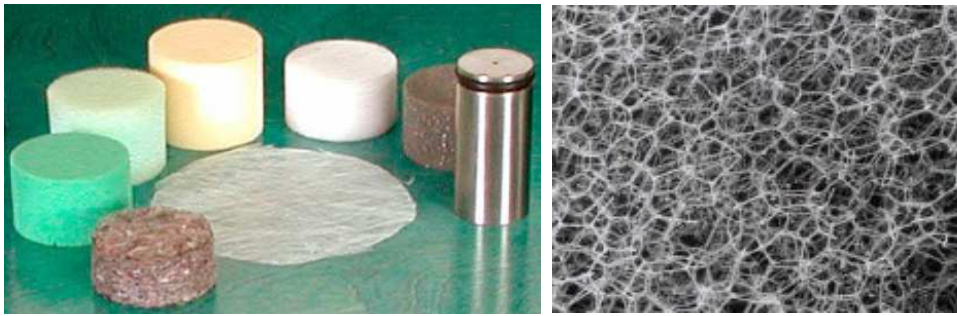


Fig. 2.1 Poroelastic material for sound absorption.

吸音材料として使用される多孔質体には，素材により主に二種類ある．一つはポリウレタンを材料として発泡させたポリウレタンフォーム，もう一つは細系のナイロン繊維などを絡めた繊維材である．図 2.1 にそれらのサンプルを示している．どちらも材料自体の固体相と流体相で構成され，固体相が壁面となる無数の流路を形成している．流路断面の代表長さは，一般に使用される吸音材料で $10 \sim 100 \mu\text{m}$ 程度である．

外部から音波が多孔質材に入射すると，流路内の空気が振動し音波が進行する．このとき，壁面における空気粘性による損失と，空気の圧縮・膨張により生じる熱が固体相へ散逸することによる損失が発生する．さらに，空気の振動により固体相の振動が励起され，固体相の材料減衰により散逸される．こうした機構により，音波の振幅が減少すなわち吸音される．一方，多孔質材が機械的に加振されると固体相と流路内の空気の両相が振動し，それぞれの相を介して伝達される．この場合も両相の運動は連成し複雑な挙動を示す．

このような特性を考慮した多孔質体のモデルが，1956 年に Biot [16] [17] により提案されて以来，広く適用されている．このモデルでは，固体相は等方性弾性体，流体相は等価密度と等価体積弾性率を有する等価流体として扱われており，その特性は，図 2.2 に示すように，円管状の流路が等方的に存在すると仮定して導出している．ただし，閉じた流路内の空気は考慮しないこと，および流路断面における代表長さすなわち円管の半径は，音の波長よりも十分小さくかつ，空気粒子の平均自由行程 ($\approx 0.1 \mu\text{m}$)

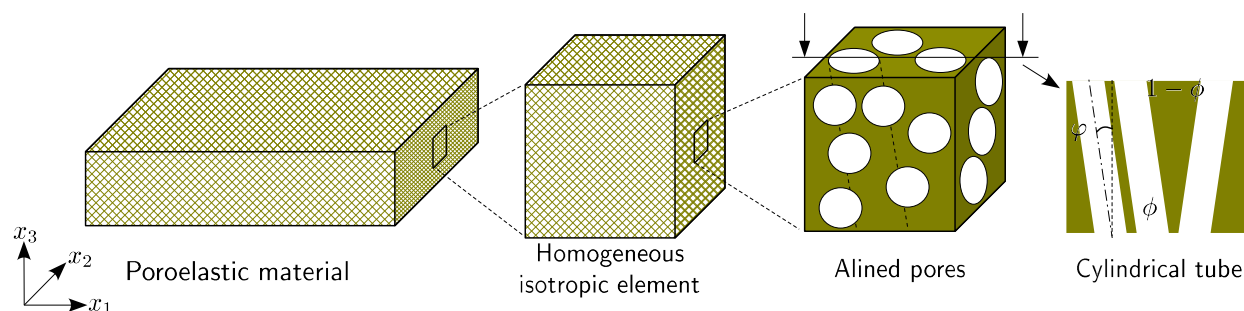


Fig. 2.2 Biot's model for poroelastic material.

よりも大きいことを仮定している。

Biot がこのモデルを提案した当時は水で満たされた土壌を対象にしており、地質内を伝播する地震波の予測などに適用された。その後、1980 年以降に Johnson や Allard らによって、吸音材のように空気で満たされた弾性体材料にも展開されてきた。空気の等価特性の表現に関しては Champoux と Allard [31] や、Johnson ら [32] などにより、構成式や平衡方程式に関しては Atalla ら [21] により改良が加えられてきている。過去の文献では改良点にのみ言及している場合が多く、理論の起源からたどると説明は多くの文献を参照する必要がある。また、Allard の著書 [18] には比較的まとまった説明はなされているものの、記述が若干冗長になっている感は否めない。

そこで本章では、空気で満たされた多孔質材内部で発生する減衰の基本となる、微小円管内における流れを微視的な視点で捉えるところを基点とし、巨視的な流体の等価モデルに至るまでを概説する。また構成式および運動方程式に関しては、Biot が提案した定式化から現在広く適用されている形に至るまでの概略を説明する。

2.1 等価流体

まず、音波入射方向に平行におかれた真直円管内を伝播する音波の等価特性を求め、それを傾きをもっておかれた真直円管に適用する。次に、管半径を計測可能な特性値に置き換え、単位面積中にある割合で集合している状態に展開する。最後に、任意断面を有する流路を考慮するため断面係数を定義して、実際の多孔質材料に適用可能な形にする。

2.1.1 真直円管

微小円管内における音波の伝播については 1800 年後半の Helmholtz, Kirchhoff, Rayleigh [33] にまでさかのぼるが、ここでは、実際の吸音材が有する流路半径において有効な Stinson [34] の理論を基準にする。図 2.3 に示すように、十分剛な固体相中に設けられた半径 R の円管流路内に存在する圧縮性ニュートン流体の挙動について考える。

平均流れ 0, 流速 \mathbf{V} , 圧力 P , 質量密度 ρ , 平衡状態での質量密度 ρ_0 , 粘性係数 μ , 熱伝導率 κ , 温

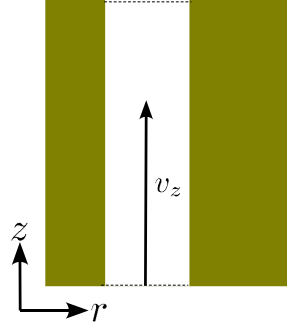


Fig. 2.3 Circular straight tube.

度 T とすると，支配方程式は次の 4 つの式で与えられる．

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (2.1)$$

$$\kappa \nabla^2 T = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$P = \rho R_0 T \quad (2.4)$$

これらの式はそれぞれ，Navier-Stokes の方程式，気体の熱伝導方程式，質量保存則，そして気体の状態方程式を示している．

今，円管内の流体を空気とし，周波数 f （角振動数 ω ）の調和振動を仮定する．微小流速を $\mathbf{v}e^{j\omega t}$ ，平衡状態 $P_0 = \rho_0 R_0 T_0$ からの圧力，質量密度，温度の微小変動をそれぞれ $p e^{j\omega t}$, $\delta e^{j\omega t}$, $\tau e^{j\omega t}$ とし，上式に代入すると以下の式を得る．

$$\rho_0 j\omega \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.5)$$

$$\kappa \nabla^2 \tau = j\omega \rho_0 C_p \tau - j\omega p \quad (2.6)$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + j\omega \delta = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{p}{P_0} \simeq \frac{\delta}{\rho_0} + \frac{\tau}{T_0} \quad (2.8)$$

また，断熱過程時の空気中での音速を c ，定積比熱を C_v ，定圧比熱を C_p ，比熱比を γ ，動粘性係数を ν ，温度拡散率を ν' ，プラントル数を Pr とすると次式が成り立つ．

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.9)$$

$$\rho_0 c^2 = \gamma P_0 \quad (2.10)$$

$$C_p - C_v = R_0 = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \quad (2.11)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (2.12)$$

$$\nu' = \frac{\kappa}{\rho_0 C_p} \quad (2.13)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\nu'} \quad (2.14)$$

流体の媒質が空気の場合, $c = 340$ m/s, $\rho_0 = 1.225$ kg/m³, $\gamma = 1.4$, $\mu = 1.84 \times 10^{-5}$ Ns/m², $Pr = 0.715$ である.

これらの式からこのまま理論解を求めることは難しいため, 何からの簡略化が必要となる. Stinson [34] は, $R > 10^{-3}$ cm かつ $Rf^{3/2} < 10^6$ cm s^{-3/2} を満たす円管内の空気中の挙動について, 半径方向の速度成分は軸方向の速度成分に比して最大で 2 % 程度, また半径方向の圧力勾配は軸方向の圧力勾配に比して最大で 0.1 % 程度でありそれぞれ無視できることを示している. 管軸方向の座標を z , その方向の単位ベクトルを \mathbf{k} とすると, 流速 \mathbf{v} , 圧力勾配 ∇p は次式で近似できる.

$$\mathbf{v} \simeq v_z \mathbf{k} \quad (2.15)$$

$$\nabla p \simeq \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.16)$$

ただし, v_z は流速の管軸方向成分である. また等温過程では,

$$\frac{p}{P_0} = \frac{\delta}{\rho_0} \quad (2.17)$$

断熱過程では,

$$\frac{p}{P_0} = \gamma \frac{\delta}{\rho_0} \quad (2.18)$$

となり, $\frac{p}{P_0}$ と $\frac{\delta}{\rho_0}$ が同じオーダーであることを考慮すると, $\omega < 10^6$ Hz の範囲において, 次の関係式が成り立つ.

$$\mu \nabla \cdot \mathbf{v} = -j\omega\mu \frac{\delta}{\rho_0} \simeq -j\omega\mu \frac{p}{P_0} = -\frac{j\omega\mu\gamma}{\rho_0 c^2} p \ll p \quad (2.19)$$

したがって, 空気の場合, $\omega < 10^6$ Hz の範囲においては

$$|\mu \nabla \cdot \mathbf{v}| \ll |p| \quad (2.20)$$

となり, 式 (2.5) において右辺第 3 項を無視することができる. これらの関係式を利用すると, 管軸 z 方向についての速度 v_z , 圧力 p , 温度 τ に関する支配方程式および境界条件は次式となる.

$$\rho_0 j\omega v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \quad (2.21)$$

$$\kappa \nabla^2 \tau = j\omega \rho_0 C_p \tau - j\omega p \quad (2.22)$$

$$v_z|_{r=R} = 0 \quad (2.23)$$

$$\tau|_{r=R} = 0 \quad (2.24)$$

ここで、管軸 z 方向の伝播定数を m とすると、速度 $v_z(r)$ 、温度 $\tau(r)$ を半径 r の関数として次式の形で書ける。

$$v_z = v_z(r) e^{jmz} \quad (2.25)$$

$$p = p e^{jmz} \quad (2.26)$$

$$\tau = \tau(r) e^{jmz} \quad (2.27)$$

これらを代入すると、支配方程式は次式のようにになる。

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - m^2 v_z - \frac{j\omega}{\nu} v_z = \frac{jm}{\mu} p \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} - m^2 \tau - \frac{j\omega}{\nu'} \tau = -\frac{j\omega}{\kappa} p \quad (2.29)$$

さらに、Stinson [34] は $R > 10^{-3}$ cm の場合に、 $|m^2| \ll |j\omega/\nu|$ 、 $|m^2| \ll |j\omega/\nu'|$ が成り立つことも示している。これを用いると、さらに次式のように簡略化できる。

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{j\omega}{\nu} v_z = \frac{jm}{\mu} p \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{j\omega}{\nu'} \tau = -\frac{j\omega}{\kappa} p \quad (2.31)$$

式 (2.30) については、

$$v_z = -\frac{mp}{\omega \rho_0} \psi \quad (2.32)$$

$$\eta = \nu \quad (2.33)$$

式 (2.31) については、

$$\tau = \frac{\nu' p}{\kappa} \psi \quad (2.34)$$

$$\eta = \nu' \quad (2.35)$$

と変数変換することで、次式で統一して表すことができる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{j\omega}{\eta} \psi = -\frac{j\omega}{\eta} \quad (2.36)$$

$$\psi|_{r=R} = 0 \quad (2.37)$$

この式はさらに

$$\alpha^2 = -\frac{j\omega}{\eta} \quad (2.38)$$

$$\alpha r = q \quad (2.39)$$

と変数変換すると、以下に示す 0 次のベッセル方程式であることが分かる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial \psi}{\partial q} + (\psi - 1) = 0 \quad (2.40)$$

この基本解は、0 次第一種ベッセル関数 $J_0(q)$ 、0 次第二種ベッセル関数 $Y_0(q)$ を用いて、次式で与えられる。

$$\psi - 1 = C_1 J_0(q) + C_2 Y_0(q) \quad (2.41)$$

ここで、 C_1 、 C_2 は任意定数である。 $\psi|_{r=0}$ で有限値をとることと、境界条件 $\psi|_{r=R} = 0$ を考慮すると、 C_1 、 C_2 は次式のように定められる。

$$C_1 = -\frac{1}{J_0(\alpha R)} \quad (2.42)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.43)$$

したがって解 ψ は次式となる。

$$\psi = 1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} \quad (2.44)$$

この解には管半径方向の変数 r が含まれ、管断面内では例えば、図 2.4 のような分布となる。

ここで、マクロ的な物理量として円管断面内での平均値をとり、それらを $\langle \rangle$ で表すものとする。解 ψ の断面平均 $\langle \psi \rangle = F(\eta)$ は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \psi \rangle = F(\eta) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \psi 2\pi r dr = 1 - \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{r J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} dr \\ &= 1 - \frac{2}{\alpha^2 R^2} \int_0^{\alpha R} \frac{z J_0(z)}{J_0(\alpha R)} dz = 1 - \frac{2}{\alpha R} \frac{J_1(\alpha R)}{J_0(\alpha R)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

ここで、 $s = \left(\frac{\omega R^2}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$ とすると、

$$\alpha R = \left(\frac{-j\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} R = s\sqrt{-j} \quad (2.46)$$

であるから、 $F(\nu)$ および $F(\nu')$ の逆数は次式となる。

$$\frac{1}{F(\nu)} = \frac{1}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}} = 1 + \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})} \frac{1}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}} = 1 + \frac{8}{s^2 j} G_c(s) \quad (2.47)$$

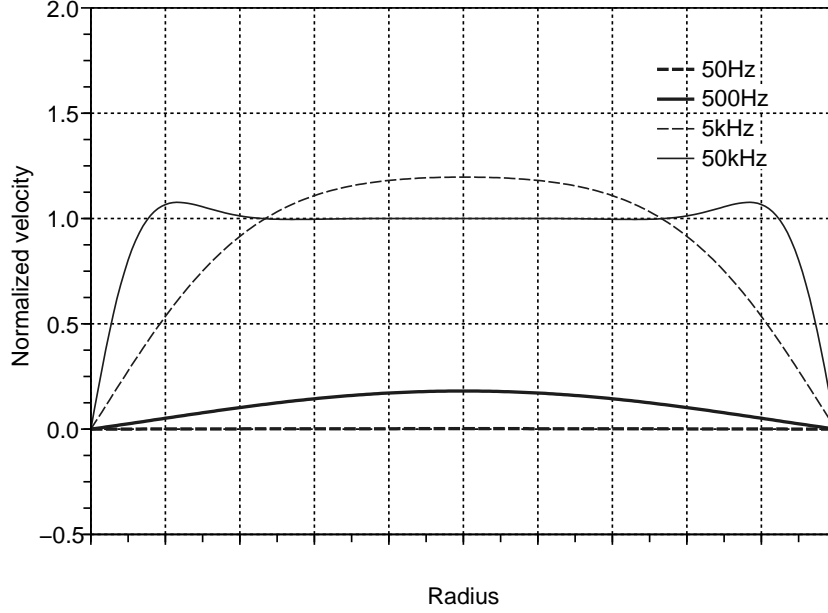


Fig. 2.4 Velocity distribution in the section of a circular straight tube ($R = 100 \mu\text{m}$).

$$\frac{1}{F(\nu')} = \frac{1}{F(\frac{\nu}{Pr})} = 1 + \frac{8}{Prs^2j} G_c(\sqrt{Pr}s) \quad (2.48)$$

なお, $G_c(s)$ は次式で表される.

$$G_c(s) = -\frac{s\sqrt{-j} J_1(s\sqrt{-j})}{4 J_0(s\sqrt{-j})} \frac{1}{1 - \frac{2 J_1(s\sqrt{-j})}{s\sqrt{-j} J_0(s\sqrt{-j})}} \quad (2.49)$$

さて, ここで断面平均値を用いて, マクロの視点から考えた, 動的な等価密度 ρ^{fc} と 等価体積弾性率 K^f を次式で定義する.

$$j\omega\rho^{fc}\langle v_z \rangle = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.50)$$

$$p = -K^f \nabla \cdot \langle \mathbf{u}^f \rangle \quad (2.51)$$

ただし, \mathbf{u}^f は流体の変位である. 等価体積弾性率 K^f については, $\rho_0 \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + j\omega \langle \delta \rangle = 0$ を用いると, 次式に改めることができる.

$$K^f = \frac{\rho_0 p}{\langle \delta \rangle} \quad (2.52)$$

管軸方向の流速 v_z , 温度 τ , 質量密度 δ の断面平均は次式で表せる.

$$\langle v_z \rangle = -\frac{mp}{\omega \rho_0} F(\nu) \quad (2.53)$$

$$\langle \tau \rangle = \frac{\nu' p}{\kappa} F(\nu') \quad (2.54)$$

$$\frac{\langle \tau \rangle}{T_0} = \frac{p}{P_0} - \frac{\langle \delta \rangle}{\rho_0} \quad (2.55)$$

これらを代入すると次式を得る.

$$\rho^{fc} = \frac{\rho_0}{F(\nu)} \quad (2.56)$$

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) F(\nu')} \quad (2.57)$$

さらに $F(\nu), F(\nu')$ の具体的な表現を代入すると, 次式を得ることができる.

$$\rho^{fc} = \rho_0 \left\{ 1 + \frac{8}{s^2 j} G_c(s) \right\} \quad (2.58)$$

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{8}{P r s^2 j} G_c(\sqrt{P r s}) \right\}^{-1}} \quad (2.59)$$

2.1.2 斜円管

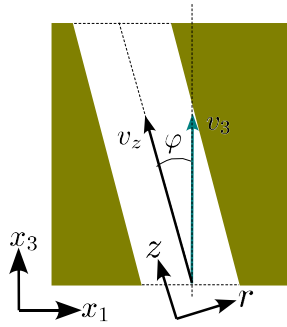


Fig. 2.5 Circular slanted tube.

次に, 管軸 z が入射方向から角度 φ だけ傾いているとする. 入射方向に平行にとった座標軸を x_3 , 管における断面平均流速の x_3 方向成分を $\langle v_3 \rangle$ とすると,

$$\langle v_z \rangle \cos \varphi = \langle v_3 \rangle, \quad z \cos \varphi = x_3 \quad (2.60)$$

であるから, マクロ的な運動方程式は次式となる.

$$j \omega \rho^{fc} \frac{\langle v_3 \rangle}{\cos \varphi} = - \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial x_3} \quad (2.61)$$

管軸の傾き程度を表す特性値トーチュオシテイ α_∞ を

$$\alpha_\infty = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad (2.62)$$

と定義すると、運動方程式は次のように書ける。

$$j\omega\alpha_\infty\rho^{fc}\langle v_3 \rangle = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \quad (2.63)$$

この場合、トーチュオシテイ α_∞ を等価密度 ρ^{fc} に含めるものとする、等価密度は次式で表せる。

$$\rho^{fc} = \frac{\alpha_\infty \rho_0}{F(\nu)} = \alpha_\infty \rho_0 \left\{ 1 + \frac{8}{s^2 j} G_c(s) \right\} \quad (2.64)$$

なお、等価体積弾性率は変わりなく、前節と同じ式で与えられる。

2.1.3 集合円管

s を計測可能な物理量である、ポロシテイ（多孔率） ϕ 、空気流れ抵抗 σ および トーチュオシテイ α_∞ を用いて表す。単位面積当たりに n 本の斜円管が存在する場合、ポロシテイ ϕ は次式で与えられる [18]。

$$\phi = n \frac{\pi R^2}{\cos \varphi} \quad (2.65)$$

なお、ポロシテイは材料をピストン板つきの密閉圧力容器に入れ、ピストンを動かしたときの圧力変動から計測できる [35]。

流れ抵抗 σ は単位体積の空気流れに対する単位厚さ当たりの圧力低下で定義される。ISO 9053 で計測方法が規定されており、材料を取付けた管にコンプレッサなどから直流空気を送り、材料前後の圧力降下量を計測する。なお、測定する空気流速は 0.5 mm/s とされている [36] [37]。集合斜円管の場合、流れに垂直に計った円管の長さを d 、単位時間当たりの空気流量を V 、降下圧力を ΔP とすると σ は次式となる。

$$\sigma = \frac{\Delta P}{Vd} \quad (2.66)$$

$q \rightarrow 0$ のとき、 $1 - \frac{2J_1(q)}{qJ_0(q)} \simeq -\frac{q^2}{8}$ であることを用いると、 $\omega \rightarrow 0$ のとき、

$$\langle v_z \rangle \simeq \frac{mp}{\omega\rho_0} \frac{\alpha^2 R^2}{8} = \frac{mp}{\omega\rho_0} \frac{-j\omega R^2}{8\nu} = \frac{R^2}{8\rho_0\nu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{R^2}{8\rho_0\nu} \frac{\Delta P}{d/\cos \varphi} \quad (2.67)$$

$V = n\pi R^2 \langle v_z \rangle$ より、

$$\sigma = \frac{8\rho_0\nu}{\phi R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{8\rho_0\nu\alpha_\infty}{\phi R^2} \quad (2.68)$$

$s^2 = \frac{\omega R^2}{\nu}$ であることから、 s はポロシテイ ϕ 、流れ抵抗 σ 、およびトーチュオシテイ α_∞ を用いて次式で表すことができる。

$$s^2 = \frac{8\rho_0\omega\alpha_\infty}{\sigma\phi} \quad (2.69)$$

上式を代入すると、等価密度 ρ^{fc} と 等価体積弾性率 K^f は次式となる.

$$\rho^{fc} = \alpha_\infty \rho_0 \left\{ 1 + \frac{8}{s^2 j} G_c(s) \right\} = \alpha_\infty \rho_0 \left\{ 1 + \frac{\sigma \phi}{j \omega \rho_0 \alpha_\infty} G_c(s) \right\} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} K^f &= \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{8}{Pr s^2 j} G_c(\sqrt{Prs}) \right\}^{-1}} \\ &= \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{\sigma \phi}{j Pr \omega \rho_0 \alpha_\infty} G_c(\sqrt{Prs}) \right\}^{-1}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

2.1.4 断面係数の導入

実際の多孔質材料では流路断面は円形になっていることは少なく、正方形や三角形であったりスリットに近い場合など様々である．非円形断面の場合の等価密度・等価体積弾性率も理論的に導かれているが [38]，実際は種々の形状の流路が混在しているため，その割合などを決めることは難しい．そこで，流路断面形状の平均値に関係したパラメータである断面係数を新たに定義する．

円管内流れにおいて $\omega \rightarrow \infty$ すなわち $\alpha \rightarrow \infty$ では，

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \alpha^2 \frac{J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}}{J_0(\alpha R)} \quad (2.73)$$

であるから，次の関係式が成り立つ．

$$\left| \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right| \quad (2.74)$$

また， $r = R - \beta$ と変数変換すると断面内における支配方程式は次式で与えられる．

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} - \frac{j \omega}{\eta} \psi = -\frac{j \omega}{\eta} \quad (2.75)$$

$$\psi|_{\beta=0} = 0 \quad (2.76)$$

この解は，

$$\psi = 1 - e^{-j \alpha \beta} \quad (2.77)$$

となり，断面内の大部分で密度および温度は一定で，壁面近傍でのみ大きく変化することが分かる．円管内流れにおける壁面近傍の挙動が任意断面流路でも成り立つとし，流路全体の体積を V ，流路壁面の

表面積を A ，壁面の境界層厚さを ε とすると，断面平均 $\langle \psi \rangle$ は，

$$\begin{aligned}\langle \psi \rangle &= F(\eta) = \frac{\int \psi dV}{\int dV} = 1 - \frac{1}{V} \int e^{-j\alpha\beta} dV \simeq 1 - \frac{1}{V} \int_0^\varepsilon e^{-j\alpha\beta} A d\beta \\ &= 1 - \frac{1}{j\alpha} \frac{A}{V} \{1 - e^{\frac{3\pi}{2}(-1-j)}\} \simeq 1 - \frac{1}{j\alpha} \frac{A}{V}\end{aligned}\quad (2.78)$$

ここで，流路断面の形状に関係したパラメータとして代表長さ $\Lambda = \frac{2V}{A}$ を定義すると断面平均は次式となる．

$$\langle \psi \rangle = 1 - \frac{2}{j\alpha\Lambda} \quad (2.79)$$

パラメータ Λ は，流路断面の形状が円形の場合には，管半径 R に一致し次式の関係がある．

$$\Lambda = R = \left(\frac{8\nu\rho_0\alpha_\infty}{\sigma\phi} \right)^{1/2} \quad (2.80)$$

流路断面の形状が円形でない場合には，次式で表される断面係数 c を定義する．

$$\Lambda = \frac{1}{c} \left(\frac{8\nu\rho_0\alpha_\infty}{\sigma\phi} \right)^{1/2} \quad (2.81)$$

パラメータ Λ を用いると，等価密度および等価体積弾性率は次式のように書ける．

$$\rho^{fc} = \frac{\rho_0\alpha_\infty}{F(\nu)} \simeq \frac{\rho_0\alpha_\infty}{1 - \frac{2}{j\alpha\Lambda}} \simeq \rho_0\alpha_\infty \left(1 + \frac{2}{j\alpha\Lambda} \right) = \rho_0\alpha_\infty \left\{ 1 + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{4j\omega\nu}{\Lambda^2} \right)^{1/2} \right\} \quad (2.82)$$

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1)F(\nu')} \simeq \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{4j\omega\nu}{\Lambda^2 P_r} \right)^{1/2} \right\}^{-1}} \quad (2.83)$$

一方， $\omega \rightarrow 0$ を考えると流れ抵抗の定義から，

$$\sigma = \frac{\Delta P}{Vd} = \frac{\Delta P}{\phi \langle v_n \rangle d} \quad (2.84)$$

これは，

$$j\omega \frac{\sigma\phi}{j\omega} \langle v_n \rangle = \frac{\Delta P}{d} \quad (2.85)$$

であり，等価密度は次式のように書ける．

$$\rho^{fc} = \frac{\sigma\phi}{j\omega} \quad (2.86)$$

また，断面内において温度一定であるから $\langle \tau \rangle = 0$ で， $\frac{p}{P_0} = \frac{\langle \delta \rangle}{\rho_0}$ であるから等価体積弾性率は次式のように書ける．

$$K^f = \frac{\rho_0 p}{\langle \delta \rangle} = P_0 \quad (2.87)$$

$\omega \rightarrow 0$ と $\omega \rightarrow \infty$ におけるそれぞれの表現式を組み合わせると、以下のような式が書ける [18].

$$\rho^{fc} = \rho_0 \alpha_\infty \left\{ 1 + \frac{\sigma \phi}{j \omega \rho_0 \alpha_\infty} G_j(\omega) \right\} \quad (2.88)$$

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{\sigma \phi}{j P r \omega \rho_0 \alpha_\infty} G_j(P r \omega) \right\}^{-1}} \quad (2.89)$$

ただし, $G_j(\omega)$ は次式で定義している.

$$G_j(\omega) = \left(1 + \frac{4j\omega\nu}{\Lambda^2} \frac{\rho_0^2 \alpha_\infty^2}{\sigma^2 \phi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.90)$$

断面の形状が円形でない場合, 形状の違いが等価密度と等価体積弾性率に及ぼす効果は異なるため, 別の断面係数 c' を用いる必要がある [39]. その場合の代表長さを Λ' とすると次式で表される関係式が得られる.

$$\Lambda' = \frac{1}{c'} \left(\frac{8\nu\rho_0\alpha_\infty}{\sigma\phi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.91)$$

また $\sigma' = c'^2 \sigma$ で定義される σ' を用いると次式のようにも書ける.

$$\Lambda' = \left(\frac{8\nu\rho_0\alpha_\infty}{\sigma'\phi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.92)$$

以上より, 等価体積弾性率は次式で与えられることとなる.

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{\sigma' \phi}{j P r \omega \rho_0 \alpha_\infty} G'_j(P r \omega) \right\}^{-1}} \quad (2.93)$$

$$G'_j(P r \omega) = \left(1 + \frac{4jP r \omega \nu}{\Lambda'^2} \frac{\rho_0^2 \alpha_\infty^2}{\sigma'^2 \phi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

なお, 上式は次式のように書き改めることができる.

$$K^f = \frac{\gamma_0 P_0}{\gamma_0 - (\gamma_0 - 1) \left\{ 1 + \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2} G' \right\}^{-1}} \quad (2.95)$$

$$G'_j(\omega) = \left(1 + \frac{j\omega\Lambda'^2}{16\nu'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.96)$$

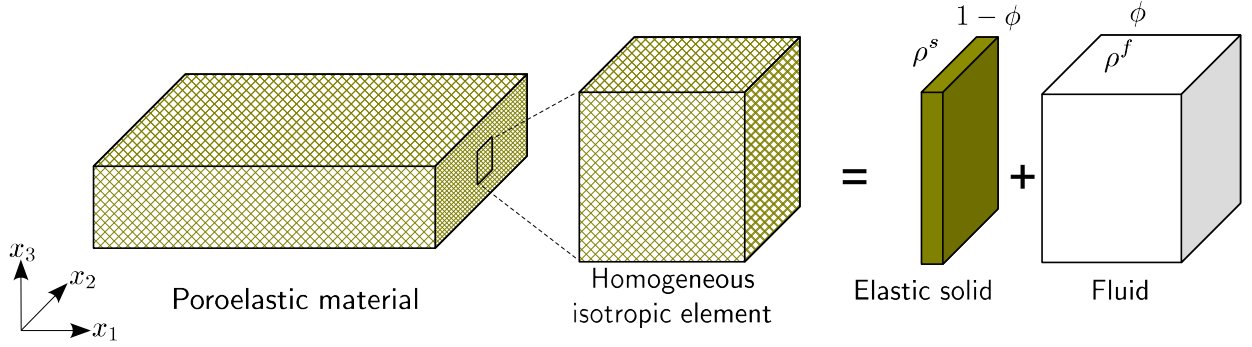


Fig. 2.6 Schematic view of mixture of the homogenized solid and fluid.

2.2 構成式・運動方程式

2.2.1 構成式

Biot [40] [41] は固体相である等方性弾性体と流体相である等価流体が、図 2.6 のように、それぞれ $1 - \phi$ および ϕ の割合で均一に混合されているとしたときの、応力-歪み関係式を次式のように導いている。

$$\sigma_{ij}^s = \left\{ (P - 2N)\varepsilon_{kk}^s + Q\varepsilon_{kk}^f \right\} \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^s \quad (2.97)$$

$$\sigma^f = (-\phi p) = Q\varepsilon_{kk}^s + R\varepsilon_{kk}^f \quad (2.98)$$

ここで、 σ_{ij}^s , ε_{ij}^s は固体相の応力および歪み、 σ^f , ε_{ij}^f , p は流体相の応力、歪みおよび圧力である。また P , Q , R は二相間の連成を考慮した体積弾性率、 N は固体相のせん断弾性率である。

また、Biot は以下の 3 つの思考実験により、 P , Q , R , N と、固体相の体積弾性率 K^s , 固体相材料の体積弾性率 K^b および 流体相の体積弾性率 K^f との関係式を導出している。なお、ここでは思考実験に供する多孔質材料の表面は表層膜で覆われている状態を仮定している。また、固体相の体積歪みを $\theta^s = \varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s + \varepsilon_{33}^s$, 固体相の Lamé の定数を λ^s , μ^s , 流体相の体積歪みを $\theta^f = \varepsilon_{11}^f + \varepsilon_{22}^f + \varepsilon_{33}^f$, とする。

1. まずせん断力を負荷をした場合、体積歪みに関しては $\theta^s = \theta^f = 0$ であるから、

$$\sigma_{ij}^s = 2N\varepsilon_{ij}^s \quad (2.99)$$

$$\sigma^f = 0 \quad (2.100)$$

2. 次に静水圧 p を負荷した場合の圧力の釣り合いを考えると、

$$-p(1 - \phi) = \left(P - \frac{4}{3}N \right) \theta^s + Q\theta^f \quad (2.101)$$

$$-p\phi = Q\theta^s + R\theta^f \quad (2.102)$$

$K^b = -\frac{p}{\theta^s}, K^f = -\frac{p}{\theta^f}$ であるから,

$$1 - \phi = \frac{P - \frac{4}{3}N}{K^b} + \frac{Q}{K^f} \quad (2.103)$$

$$\phi = \frac{Q}{K^b} + \frac{R}{K^f} \quad (2.104)$$

3. 最後に表層膜の一部を外気に開放した状態で, 静水圧 p を負荷をした場合の圧力の釣り合いを考えると, 流体相の圧力変化はゼロであるから,

$$-p = \left(P - \frac{4}{3}N\right)\theta^s + Q\theta^f \quad (2.105)$$

$$0 = Q\theta^s + R\theta^f \quad (2.106)$$

$K^s = -\frac{p}{\theta^s}$ であるから,

$$K^s = P - \frac{4}{3}N - \frac{Q^2}{R} \quad (2.107)$$

以上の式を P, Q, R, N について解くと次式の関係式を得ることができる.

$$P = \frac{\left(1 - \phi - \frac{K^s}{K^b}\right)(1 - \phi)K^b + \phi \frac{K^b}{K^f}K^s}{\left(1 - \phi - \frac{K^s}{K^b}\right) + \phi \frac{K^b}{K^f}} + \frac{4}{3}N \quad (2.108)$$

$$Q = \frac{\left(1 - \phi - \frac{K^s}{K^b}\right)\phi K^b}{\left(1 - \phi - \frac{K^s}{K^b}\right) + \phi \frac{K^b}{K^f}} \quad (2.109)$$

$$R = \frac{\phi^2 K^b}{\left(1 - \phi - \frac{K^s}{K^b}\right) + \phi \frac{K^b}{K^f}} \quad (2.110)$$

$$N = \mu \quad (2.111)$$

通常 K^s は実験的に同定できるが, 固体相材料の体積弾性率 K^b の同定は難しい. ここでは, Hashin-Shtrikman [42] の二相材料の弾性率推定式の上限值を表す次式から K^b を算定する.

$$K^s = K^b + \frac{\phi}{\frac{1}{K^f - K^b} + \frac{1 - \phi}{K^b + 4/3G^b}} \quad (2.112)$$

ここで、 G^b は固体相材料のせん断剛性である．固体相材料のポアッソン比を $1/3$ ， $K^f \ll K^b$ が成り立つとすると，次式の推定式が得られる．

$$K^b = \frac{1+2\phi}{1-\phi} K^s \quad (2.113)$$

通常使用される吸音性材料では $\phi \approx 1$ で，固体相材料の体積弾性率は固体相の体積弾性率と比べて著しく大きく， $K^b \gg K^s, K^f$ が成り立つことから， P, Q, R は次式のように簡略化できる．

$$P \simeq \frac{(1-\phi)^2}{\phi} K^f + K^s + \frac{4}{3} N \quad (2.114)$$

$$Q \simeq (1-\phi) K^f \quad (2.115)$$

$$R \simeq \phi K^f \quad (2.116)$$

2.2.2 運動方程式

Biot [16] は，固体相の変位を u_i^s ，流体相の変位を u_i^f とし，空気粘性による減衰力を考慮しない場合，運動方程式を以下のように表した．

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} \quad (2.117)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} \quad (2.118)$$

ここで， ρ_{11}, ρ_{22} は固体相および流体相に関する等価密度， ρ_{12} は二相間の連成に関する等価密度である． ρ^s を固体相材料の質量密度， ρ^f を流体相の質量密度（空気の場合は ρ_0 とする）を用いて， $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{12}$ を表すことを考える．

まず，二相間の相対速度差が 0 の場合，運動方程式は以下ようになる．

$$(\rho_{11} + \rho_{12}) \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} \quad (2.119)$$

$$(\rho_{12} + \rho_{22}) \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} \quad (2.120)$$

この場合は，固体相・流体相が単独で存在する場合と等しいので次式が成り立つ．

$$\rho_{11} + \rho_{12} = (1-\phi)\rho^s \quad (2.121)$$

$$\rho_{12} + \rho_{22} = \phi\rho^f \quad (2.122)$$

次に，固体相が流体相に比べて，非常に剛性が大きく，変位が常に 0 の場合を考えると以下のようになる．

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} \quad (2.123)$$

$$\rho_{22} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^f}{\partial x_i} \quad (2.124)$$

この場合、前章で述べたように流体相の等価密度は次式となる。

$$\rho_{22} = \rho^f \alpha_\infty \quad (2.125)$$

また、単位体積あたりの固体相が流体相から受ける力は、図 2.7 に示すように流路が角度 φ だけ傾いている場合、次式で表される。

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \phi \sin^2 \varphi \quad (2.126)$$

流体相の等価密度と加速度を用いて慣性力として表すと、

$$-\rho^f \alpha_\infty \phi \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} \quad (2.127)$$

さらに、 $\frac{1}{\cos \varphi^2} = \alpha_\infty$ であることを用いると、慣性力は次式で与えられる。

$$-(\alpha_\infty - 1) \phi \rho^f \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} \quad (2.128)$$

したがって、二相間の連成に伴う等価密度 ρ_{12} は、

$$\rho_{12} = -(\alpha_\infty - 1) \phi \rho^f \quad (2.129)$$

以上から ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{12} は次式で表すことができる。

$$\rho_{11} = (1 - \phi) \rho^s + (\alpha_\infty - 1) \phi \rho^f \quad (2.130)$$

$$\rho_{12} = -(\alpha_\infty - 1) \phi \rho^f \quad (2.131)$$

$$\rho_{22} = \phi \rho^f + (\alpha_\infty - 1) \phi \rho^f \quad (2.132)$$

固体相および流体相にかかる空気粘性によるマクロな減衰力を、それぞれ F_i^s , F_i^f として考慮に加えると、各相の運動方程式は以下のように書くことができる。

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} + F_i^s \quad (2.133)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} + F_i^f \quad (2.134)$$

前節で述べたように粘性減衰を含めた等価密度の表現式を考慮すると減衰力は次式で与えられる。

$$F_i^s = -F_i^f = -\sigma \phi^2 G_j(\omega) \frac{\partial}{\partial t} (u_i^s - u_i^f) \quad (2.135)$$

ただし、流体相は単位体積あたり ϕ だけ含まれているため、 ϕ を乗ずる必要があることに注意する。前節と同様に空気粘性による減衰力を等価密度項に含めると各相の運動方程式は次式となる。

$$\rho^{sc} \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} + \rho^{cc} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} \quad (2.136)$$

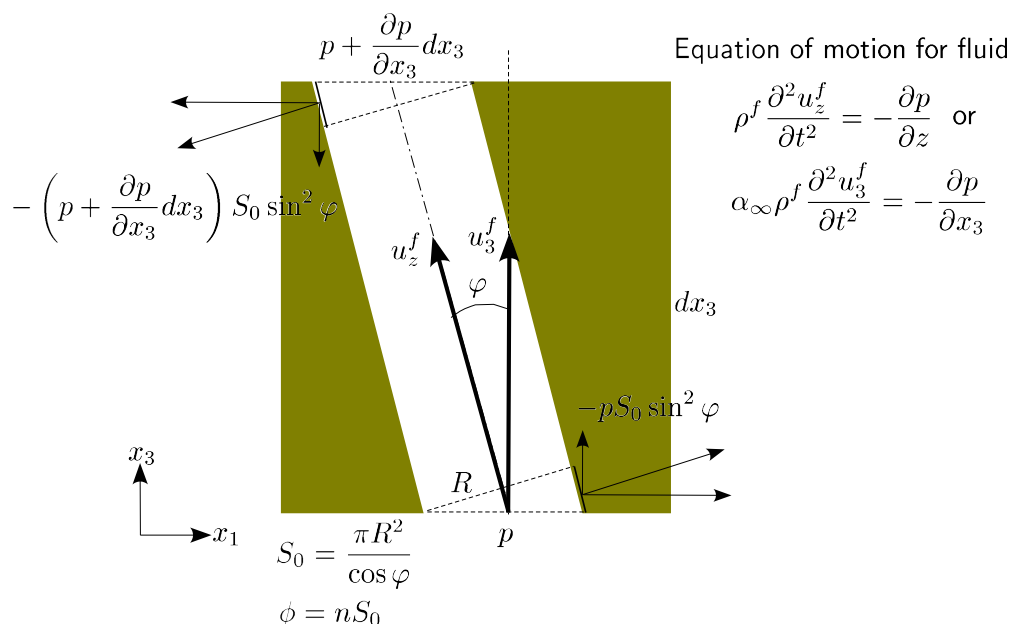


Fig. 2.7 Inertial coupling between solid and fluid phase.

$$\rho^{cc} \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} + \rho^{fc} \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^f}{\partial x_i} \quad (2.137)$$

ここで ρ^{sc} , ρ^{cc} , ρ^{fc} は粘性力を考慮した等価密度で次式となる.

$$\rho^{sc} = (1 - \phi)\rho^s + (\alpha_\infty - 1)\phi\rho^f + \frac{\sigma\phi^2}{j\omega}G_j(\omega) \quad (2.138)$$

$$\rho^{cc} = -(\alpha_\infty - 1)\phi\rho^f - \frac{\sigma\phi^2}{j\omega}G_j(\omega) \quad (2.139)$$

$$\rho^f = \phi \rho^f + (\alpha_\infty - 1) \phi \rho^f + \frac{\sigma \phi^2}{i\omega} G_j(\omega) \quad (2.140)$$

角周波数 ω の調和運動の場合, u_i^s と u_i^f で表した運動方程式は以下になる.

$$-\omega^2(\rho^{sc}u_i^s + \rho^{cc}u_i^f) = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_i} \quad (2.141)$$

$$-\omega^2(\rho^{cc}u_i^s + \rho^{fc}u_i^f) = \frac{\partial \sigma^f}{\partial x_i} \quad (2.142)$$

上式は流体相に関して各方向についての変位を未知数に持っているが，自由度低減のため圧力を未知数にして取り扱うことが多い．したがって，以下では上式から流体相の変位 u_i^f を消去し，圧力 p^f で表すことを考える．まず，式 (2.142) を u_i^f について，式 (2.98) を $\theta^f (= \varepsilon_{11}^f + \varepsilon_{22}^f + \varepsilon_{33}^f)$ について解く

と次式を得ることができる.

$$u_i^f = \frac{1}{\rho^{fc}\omega^2} \frac{\partial \phi p^f}{\partial x_i} - \frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} u_i^s \quad (2.143)$$

$$\theta^f = -\frac{\phi p^f}{R} - \frac{Q}{R} \theta^s \quad (2.144)$$

式 (2.143) において両辺の発散をとり, 式 (2.144) を代入すると, p^f と θ^s で表した流体相の運動方程式を得る.

$$\frac{1}{\rho^{fc}\omega^2} \frac{\partial^2 \phi p^f}{\partial x_i^2} - \frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} \theta^s = -\frac{\phi p^f}{R} - \frac{Q}{R} \theta^s \quad (2.145)$$

上式を整理すると,

$$\frac{1}{\rho^{fc}} \frac{\partial^2 \phi p^f}{\partial x_i^2} + \omega^2 \frac{\phi p^f}{R} - \omega^2 \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right) \theta^s = 0 \quad (2.146)$$

ここで, $\tilde{\gamma} = \phi \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right)$ とおき, ϕ を定数値とすると, 最終的に以下の式を得ることができる.

$$\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial^2 p^f}{\partial x_i^2} + \omega^2 \frac{\phi^2 p^f}{R} - \omega^2 \tilde{\gamma} \theta^s = 0 \quad (2.147)$$

次に固体相の運動方程式から, u_i^f を消去し p^f に置き換えることを考える. 固体相の応力-歪み関係式 (2.97) に式 (2.144) を代入すると, 真空中での固体相の応力 $\hat{\sigma}_{ij}^s = \lambda^s \theta^s \delta_{ij} + 2\mu^s \varepsilon_{ij}^s$ を用いて, 以下のように変形できる.

$$\sigma_{ij}^s = (P - 2N) \theta^s \delta_{ij} + Q \left(-\frac{\phi p^f}{R} - \frac{Q}{R} \theta^s \right) \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij}^s \quad (2.148)$$

$$= \left(P - 2N - \frac{Q^2}{R} \right) \theta^s \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij}^s - \frac{Q}{R} \phi p^f \delta_{ij} \quad (2.149)$$

$$= (\lambda^s \theta^s \delta_{ij} + 2\mu^s \varepsilon_{ij}^s) - \frac{Q}{R} \phi p^f \delta_{ij} \quad (2.150)$$

$$= \hat{\sigma}_{ij}^s - \frac{Q}{R} \phi p^f \delta_{ij} \quad (2.151)$$

これを固体相の運動方程式 (2.141) に代入すると, u_i^s と p^f で表した固体相の運動方程式を得ることができる.

$$-\omega^2 \rho^{sc} u_i^s - \omega^2 \rho^{cc} \left(\frac{1}{\rho^{fc}\omega^2} \frac{\partial \phi p^f}{\partial x_i} - \frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} u_i^s \right) = \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^s}{\partial x_j} - \frac{Q}{R} \frac{\partial \phi p^f}{\partial x_i} \quad (2.152)$$

上式を整理すると,

$$\omega^2 \left(\rho^{sc} - \frac{\rho^{cc2}}{\rho^{fc}} \right) u_i^s + \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right) \frac{\partial \phi p^f}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^s}{\partial x_j} = 0 \quad (2.153)$$

ここで, $\tilde{\rho} = \rho^{sc} - \frac{\rho^{cc2}}{\rho^{fc}}$ とおき, 前述のように ϕ を定数とすると以下の式を得ることができる.

$$\tilde{\rho}\omega^2 u_i^s + \tilde{\gamma} \frac{\partial p^f}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^s}{\partial x_j} = 0 \quad (2.154)$$

まとめると, u_i^s と p^f で表した運動方程式は以下のようになる.

$$\tilde{\rho}\omega^2 u_i^s + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^s}{\partial x_j} + \tilde{\gamma} \frac{\partial p^f}{\partial x_i} = 0 \quad (2.155)$$

$$\omega^2 \frac{\phi^2}{R} p^f + \frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial^2 p^f}{\partial x_i^2} - \omega^2 \tilde{\gamma} \theta^s = 0 \quad (2.156)$$

連成項を対称にするため, 流体相に関して圧力 p^f の代わりにポテンシャル ψ^f を用い, $p^f = -j\omega\psi^f$ で定義すると次式となる.

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^s}{\partial x_j} + \tilde{\rho}\omega^2 u_i^s - j\omega\tilde{\gamma} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} = 0 \quad (2.157)$$

$$\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial^2 \psi^f}{\partial x_i^2} + \omega^2 \frac{\phi^2}{R} \psi^f - j\omega\tilde{\gamma} \frac{\partial u_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad (2.158)$$

上式の運動方程式が近年では広く適用されており, 本研究においても採用している.

第 3 章

数値解法と実験的検証

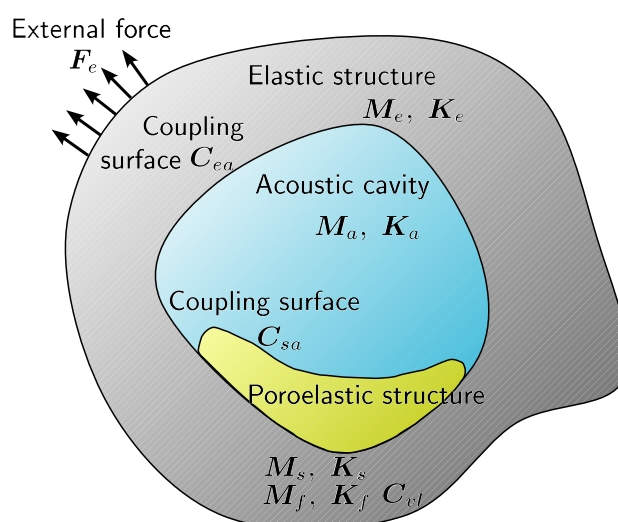


Fig. 3.1 Coupled system.

第 1 章においても述べたように，自動車などで吸遮音を目的に使用される多孔質体を含む吸遮音構造物は，図 3.1 のように弾性体からなる構造と音場の境界面に設置されることが多い．本章では，図 3.1 に示すような系の動的応答を，第 2 章で述べた多孔質体モデルを適用し数値的に解く方法を述べる．

広く使われている方法は支配方程式の弱形式を離散化して解を求める有限要素法によるものである．Kang と Bolton [19] や，Easwaran ら [20] は，式 (2.141), (2.142) をベースに各相の変位を未知数にとり解く方法を述べている．また，Atalla ら [21] は式 (2.157), (2.158) をベースに固体相の変位と流体相の圧力を未知数にとる方法を提案している．流体相については変位よりも圧力を未知数にとるほうが，系全体の自由度を小さくできるため，計算時間や資源などの観点からは有効である．しかし，等価密度や等価体積弾性率は周波数依存性をもつため，物理自由度による直接解法を適用して動的応答を求める必要がある．したがって，どちらの物理量を未知数にとっても，有限要素モデルの自由度が増加するにつれて，多大な計算時間を要することには変わりはない．一方で，多孔質体の形状が比較的単純で特

定方向の挙動が支配的と仮定できる場合には式 (2.141), (2.142) から導かれるヘルムホルツ方程式の理論解を適用することで, 有限要素法による計算と比較して計算精度は若干低下するものの, 大幅な計算時間の短縮が可能となる.

そこで, 本章では図 3.1 に示すような構造と音場の連成系を対象に, まず, 固体相の変位と流体相の圧力を未知数にした有限要素法による解法について概略を紹介する. 次に, 条件はある程度限定されるが比較的規模の大きな系においても短時間で計算可能な方法として, ヘルムホルツ方程式の理論解から構成される吸遮音材構造物の伝達マトリックスを構造・音場連成面における境界条件として組み込んだ新しい近似計算手法を提案する. また, 前章でふれたように Biot の二相材料モデルは当初, 土壌を対象に提案されたものであり, 1980 年以降に吸音材などの音響材料への展開がなされてきた. 比較的歴史が浅いこともあり, 吸音材を対象にした Biot モデルの実験検証は, 簡単な構造物を用いた例が見られる程度である [43]. そこで, 薄板構造物と多孔質体を含む吸遮音構造物を用いて, Biot のモデルによる計算結果と実験値を比較検証する. 検証は形状や境界条件を正確に考慮できる有限要素法によるものとする. 最後に, 有限要素法による計算結果と, 提案する伝達マトリックスを用いた近似計算手法による結果を, 精度と計算時間の観点から比較し, 提案手法の有効性と適用可能な範囲について検証する.

3.1 有限要素法による解法

3.1.1 弾性体の支配方程式の弱形式

図 3.1 における弾性体からなる構造物について, その支配方程式の弱形式を示しておく. 弾性体の応力を σ_{ij}^e , 歪みを ε_{ij}^e , 変位を u_i^e , その変分を δu_i^e とすると, 弾性体支配方程式の弱形式は次式で与えられる.

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j} + \rho^e \omega^2 u_i^e \right) \delta u_i^e d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

ただし, 領域を Ω^e , その境界を Γ^e とする. ここで, 左辺第一項は次式のように変形できる.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^e \delta u_i^e) = \frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j} \delta u_i^e + \sigma_{ij}^e \frac{\partial \delta u_i^e}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j} \delta u_i^e + \sigma_{ij}^e \delta \varepsilon_{ij}^e \quad (3.2)$$

さらに上式の第一項はガウスの定理より, 次のように変形できる.

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j} \delta u_i^e d\Omega = \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^e \delta u_i^e) - \sigma_{ij}^e \delta \varepsilon_{ij}^e \right\} d\Omega = \int_{\Gamma^e} \sigma_{ij}^e n_j^e \delta u_i^e d\Gamma - \int_{\Omega^e} \sigma_{ij}^e \delta \varepsilon_{ij}^e d\Omega \quad (3.3)$$

ただし, n_i^e は境界 Γ^e の外向きにたてた単位長さの法線ベクトルである. したがって, 弾性体支配方程式の弱形式は次式のようになる.

$$\int_{\Omega^e} (\sigma_{ij}^e \delta \varepsilon_{ij}^e - \rho^e \omega^2 u_i^e \delta u_i^e) d\Omega = \int_{\Gamma^e} \sigma_{ij}^e n_j^e \delta u_i^e d\Gamma \quad (3.4)$$

3.1.2 音場の支配方程式の弱形式

図 3.1 における音場についても、その支配方程式の弱形式を示しておく。粒子速度を v_i^a 、速度ポテンシャル ψ^a を $v_i^a = \frac{1}{\rho^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_i}$ と定義すると、圧力 p^a 、粒子変位 u_i^a はそれぞれ次式で与えられる。

$$p^a = -j\omega\psi^a \quad (3.5)$$

$$u_i^a = \frac{1}{\rho^a j\omega} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

ただし、 ρ^a は媒質の質量密度である。位相速度を c^a 、速度ポテンシャルを ψ^a 、その変分を $\delta\psi^a$ とすると、支配方程式の弱形式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega^a} \left(\frac{\partial^2 \psi^a}{\partial x_i^2} + \frac{\omega^2}{c^{a2}} \psi^a \right) \delta\psi^a = 0 \quad (3.7)$$

ただし、領域を Ω^a 、その境界を Γ^a とする。左辺第一項はグリーンの定理より、次のように変形できる。

$$\int_{\Omega^a} \frac{\partial^2 \psi^a}{\partial x_i^2} \delta\psi^a d\Omega = \int_{\Gamma^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_n} \delta\psi^a d\Gamma - \int_{\Omega^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \delta\psi^a}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.8)$$

したがって、支配方程式の弱形式は次式のようにになる。

$$\int_{\Omega^p} \left(-\frac{1}{\rho^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \delta\psi^a}{\partial x_i} + \frac{\omega^2}{\rho^a c^{a2}} \psi^a \delta\psi^a \right) d\Omega = \int_{\Gamma^a} -\frac{1}{\rho^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_n} \delta\psi^a d\Gamma \quad (3.9)$$

3.1.3 多孔質体支配方程式の弱形式

固体相の変位を u_i^s 、流体相の速度ポテンシャルを ψ^f とし、その変分をそれぞれ δu_i^s 、 $\delta\psi^f$ とすると、多孔質体支配方程式の弱形式は式 (2.157), (2.158) から以下のようにになる。

$$\int_{\Omega^p} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^s}{\partial x_j} + \rho\omega^2 u_i^s - j\omega\tilde{\gamma} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \right) \delta u_i^s d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega^p} \left(\frac{\phi^2}{\rho^f c} \frac{\partial^2 \psi^f}{\partial x_i^2} + \omega^2 \frac{\phi^2}{R} \psi^f - j\omega\tilde{\gamma} \frac{\partial u_i^s}{\partial x_i} \right) \delta\psi^f d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

ただし、領域を Ω^p 、その境界を Γ^p とする。固体相の弱形式は、左辺第一項にガウスの定理を用いると次式のようにになる。

$$\int_{\Omega^p} \left(\hat{\sigma}_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^s - \rho\omega^2 u_i^s \delta u_i^s + j\omega\tilde{\gamma} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \delta u_i^s \right) d\Omega = \int_{\Gamma^p} \hat{\sigma}_{ij}^s n_j^p \delta u_i^s d\Gamma \quad (3.12)$$

ただし, n_i^p は境界 Γ^p の外向きにたてた単位長さの法線ベクトルである. 流体相の弱形式は, 左辺第一項にグリーンの定理を用いると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^p} \left(-\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \psi^f}{\partial x_i} + \omega^2 \frac{\phi^2}{R} \psi^f \delta \psi^f + j\omega \tilde{\gamma} u_i^s \frac{\partial \delta \psi^f}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ = \int_{\Gamma^p} \left(-\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_n} \delta \psi^f + j\omega \tilde{\gamma} u_i^s n_i^p \delta \psi^f \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$

多孔質体の有効応力 σ_{ij}^p は, 固体相と流体相の応力の和であることから次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^p &= \sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij} = \left(\hat{\sigma}_{ij}^s - \frac{Q}{R} \phi p^f \delta_{ij} \right) - \phi p^f \delta_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^s - \alpha p^f \delta_{ij} \\ &= \hat{\sigma}_{ij}^s + j\omega \alpha \psi^f \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで, $\alpha = \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right)$ である. また, ψ^f と u^f , u^s の関係は運動方程式より次式となる.

$$-\omega^2 (\rho^{fc} u_i^f + \rho^{cc} u_i^s) = \frac{\partial \sigma^f}{\partial x_i} = \frac{\partial (-\phi p^f)}{\partial x_i} = \phi j\omega \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \quad (3.15)$$

これは両辺に n_i^p をかけると以下ようになる.

$$\frac{\partial \psi^f}{\partial x_n} = \frac{j\omega}{\phi} (\rho^{fc} u_n^f + \rho^{cc} u_n^s) \quad (3.16)$$

以上から固体相の弱形式の右辺は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^p} \hat{\sigma}_{ij}^s n_j^p \delta u_i^s d\Gamma &= \int_{\Gamma^p} (\sigma_{ij}^p - j\omega \alpha \psi^f \delta_{ij}) n_j^p \delta u_i^s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^p} \sigma_{ij}^p n_j^p \delta u_i^s d\Gamma - \int_{\Gamma^p} j\omega \alpha \psi^f n_i^p \delta u_i^s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^p} \sigma_{ij}^p n_j^p \delta u_i^s d\Gamma - \int_{\Omega^p} j\omega \alpha \frac{\partial (\psi^f \delta u_i^s)}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (3.17)$$

流体相の弱形式の右辺第一項は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^p} -\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_n} \delta \psi^f d\Gamma &= \int_{\Gamma^p} -\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{j\omega}{\phi} (\rho^{fc} u_n^f + \rho^{cc} u_n^s) \delta \psi^f d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi \left(u_n^f + \frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} u_n^s n_i^p \right) \delta \psi^f d\Gamma \end{aligned} \quad (3.18)$$

また, 流体相の弱形式の右辺第二項は以下ようになる.

$$\int_{\Gamma^p} j\omega \tilde{\gamma} u_i^s n_i^p \delta \psi^f d\Gamma = \int_{\Gamma^p} j\omega \phi \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right) u_i^s n_i^p \delta \psi^f d\Gamma \quad (3.19)$$

したがって、流体相の弱形式の右辺をまとめると以下式のように変形できる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma^p} \left(-\frac{\phi^2}{\rho^f c} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_n} \delta \psi^f + j\omega \tilde{\gamma} u_i^s n_i^p \delta \psi^f \right) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi u_n^f \delta \psi^f d\Gamma + \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi \frac{Q}{R} u_i^s n_i^p \delta \psi^f d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi (u_n^f - u_n^s) \delta \psi^f d\Gamma + \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right) u_i^s n_i^p \delta \psi^f d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi (u_n^f - u_n^s) \delta \psi^f d\Gamma + \int_{\Omega^p} -j\omega \alpha \frac{\partial (u_i^s \delta \psi^f)}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.20)
\end{aligned}$$

以上から多孔質材の弱形式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega^p} \left\{ \hat{\sigma}_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^s - \rho \omega^2 u_i^s \delta u_i^s + j\omega (\alpha + \tilde{\gamma}) \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \delta u_i^s + j\omega \alpha \psi^f \frac{\partial \delta u_i^s}{\partial x_i} \right\} d\Omega = \int_{\Gamma^p} \sigma_{ij}^p n_j^p \delta u_i^s d\Gamma \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^p} \left\{ -\frac{\phi^2}{\rho^f c} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \psi^f}{\partial x_i} + \omega^2 \frac{\phi^2}{R} \psi^f \delta \psi^f + j\omega (\alpha + \tilde{\gamma}) u_i^s \frac{\partial \delta \psi^f}{\partial x_i} + j\omega \alpha \frac{\partial u_i^s}{\partial x_i} \delta \psi^f \right\} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma^p} -j\omega \phi (u_n^f - u_n^s) \delta \psi^f d\Gamma \quad (3.22)
\end{aligned}$$

3.1.4 媒質間での境界条件

異なる媒質間の境界面で満たすべき境界条件は、応力と変位の連続条件および質量保存則から、強形式で以下のように書ける。

(1) 弾性体と流体の境界面 Γ^{ea}

$$u_n^e = -u_n^a \left(= -\frac{1}{\rho^a j\omega} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_n} \right) \quad (3.23)$$

$$\sigma_{ij}^e n_j^e = -(-p^a) n_i^a = -j\omega \psi^a n_i^a = j\omega \psi^a n_i^e \quad (3.24)$$

(2) 多孔質体と流体の境界面 Γ^{pa}

$$(1 - \phi) u_n^s + \phi u_n^f = -u_n^a \left(= -\frac{1}{\rho^a j\omega} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_n} \right) \quad (3.25)$$

$$\sigma_{ij}^p n_j^p = -(-p^a) n_i^a = -j\omega \psi^a n_i^a = j\omega \psi^a n_i^p \quad (3.26)$$

$$p^f = p^a \quad (\psi^f = \psi^a) \quad (3.27)$$

(3) 弾性体と多孔質体の境界面 Γ^{ep}

$$u_i^s = u_i^e \quad (3.28)$$

$$\phi (u_n^f - u_n^s) = 0 \quad (3.29)$$

$$\sigma_{ij}^p n_j^p = -\sigma_{ij}^e n_j^e \quad (3.30)$$

(4) 異なる二種の多孔質体（多孔質体 1 および 2）の境界面 Γ^{pp}

$$u_i^{s1} = u_i^{s2} \quad (3.31)$$

$$\phi_1(u_n^{f1} - u_n^{s1}) = -\phi_2(u_n^{f2} - u_n^{s2}) \quad (3.32)$$

$$\sigma_{ij}^{p1} n_j^{p1} = -\sigma_{ij}^{p2} n_j^{p2} \quad (3.33)$$

$$p_1^f = p_2^f \quad (3.34)$$

弾性体と多孔質体、および異なる二種の多孔質体の境界面では、相対する表面における面積分が相殺するので明示的に考慮する必要はない。したがって、考慮すべき境界条件は (1) 弾性体と流体および (2) 多孔質体と流体の二つで、それぞれの弱形式は以下になる。

$$\int_{\Gamma^{ea}} -\frac{1}{\rho^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_n} \delta \psi^a d\Gamma = \int_{\Gamma^{ea}} j\omega u_n^e \delta \psi^a d\Gamma \quad (3.35)$$

$$\int_{\Gamma^{ea}} \sigma_{ij}^e n_j^e \delta u_i^e d\Gamma = \int_{\Gamma^{ea}} j\omega \psi^a \delta u_n^e d\Gamma \quad (3.36)$$

$$\int_{\Gamma^{pa}} -j\omega \phi(u_n^f - u_n^s) \delta \psi^f d\Gamma = \int_{\Gamma^{pa}} j\omega u_n^s \delta \psi^a d\Gamma + \int_{\Gamma^{pa}} \frac{1}{\rho^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_n} \delta \psi^a d\Gamma \quad (3.37)$$

$$\int_{\Gamma^{pa}} \sigma_{ij}^p n_j^p \delta u_i^s d\Gamma = \int_{\Gamma^{pa}} j\omega \psi^a \delta u_n^s d\Gamma \quad (3.38)$$

最後に、弾性体外表面 Γ^f に作用する外力の弱形式は $f_i^e = \sigma_{ij}^e n_j^e$ とすると次式となる。

$$\int_{\Gamma^f} \sigma_{ij}^e n_j^e \delta u_i^e d\Gamma = \int_{\Gamma^f} f_i^e \delta u_i^e d\Gamma \quad (3.39)$$

3.1.5 離散化

以上の弱形式の両辺をそれぞれ足し合わせると、次式に示すように図 3.1 における系全体での弱形式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} (\sigma_{ij}^e \delta \varepsilon_{ij}^e - \rho \omega^2 u_i^e \delta u_i^e) d\Omega + \int_{\Omega^a} \left(-\frac{1}{\rho^a} \frac{\partial \psi^a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \delta \psi^a}{\partial x_i} + \frac{\omega^2}{\rho^a c_0^2} \psi^a \delta \psi^a \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega^p} \left\{ \hat{\sigma}_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^s - \rho \omega^2 u_i^s \delta u_i^s + j\omega(\alpha + \gamma) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta u_i^s + j\omega \alpha \psi \frac{\partial \delta u_i^s}{\partial x_i} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega^p} \left\{ -\frac{\phi^2}{\rho^{fc}} \frac{\partial \psi^f}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \psi^f}{\partial x_i} + \frac{\phi^2 \omega^2}{R} \psi^f \delta \psi^f + j\omega(\alpha + \gamma) u_i^s \frac{\partial \delta \psi^f}{\partial x_i} + j\omega \alpha \frac{\partial u_i^s}{\partial x_i} \delta \psi^f \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma^{ef}} f_i^e \delta u_i^e d\Gamma + \int_{\Gamma^{ea}} j\omega \psi^a \delta u_n^e d\Gamma + \int_{\Gamma^{ea}} j\omega u_n^e \delta \psi^a d\Gamma + \int_{\Gamma^{pa}} j\omega \psi^a \delta u_n^s d\Gamma + \int_{\Gamma^{pa}} j\omega u_n^s \delta \psi^a d\Gamma \end{aligned} \quad (3.40)$$

上式を離散化し、各未知数の任意の変分について上式が成り立つことを考慮すると、以下の連立方程式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e & -j\omega \mathbf{C}_{ea} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -j\omega \mathbf{C}_{ea}^T & \mathbf{K}_a - \omega^2 \mathbf{M}_a & -j\omega \mathbf{C}_{sa} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -j\omega \mathbf{C}_{sa}^T & \mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s & j\omega \mathbf{C}_{vl} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & j\omega \mathbf{C}_{vl}^T & \mathbf{K}_f - \omega^2 \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Psi}_a \\ \mathbf{U}_s \\ \boldsymbol{\Psi}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ここで、 \mathbf{U}_e 、 \mathbf{U}_s はそれぞれ弾性体、多孔質体の固体相における変位ベクトル、 $\boldsymbol{\Psi}_a$ 、 $\boldsymbol{\Psi}_f$ はそれぞれ流体、多孔質体の流体相における速度ポテンシャルベクトル、 \mathbf{K}_e 、 \mathbf{K}_a 、 \mathbf{K}_s 、 \mathbf{K}_f は各媒質における剛性マトリックス、 \mathbf{M}_e 、 \mathbf{M}_a 、 \mathbf{M}_s 、 \mathbf{M}_f は各媒質における質量マトリックス、 \mathbf{C}_{ea} 、 \mathbf{C}_{sa} はそれぞれ弾性体および多孔質体と空気の境界面における連成マトリックス、 \mathbf{C}_{vl} は多孔質内部における固体相と流体相の連成マトリックス、 \mathbf{F}_e は弾性体に作用する外力ベクトルである。

3.1.6 散逸エネルギー

多孔質材料を含む吸遮音構造物は、外部からの入力エネルギーを熱散逸させ減衰させることで、音場の音圧レベルを低下させている。多孔質材料内のどの部分で散逸しているのかを把握するため、ここでは図 3.1 に示す系について散逸エネルギーの表現式を導出しておく。

弾性体に加えられる外力 \mathbf{F}_e による入力エネルギー Π_i は次式で与えられる。

$$\Pi_i = \text{Re} (-j\omega \mathbf{U}_e^{*T} \mathbf{F}_e) \quad (3.42)$$

ただし、 Re は実部をとることを表す。系全体で考えると散逸エネルギー Π_d は入力エネルギーに等しくなければならず、次の関係式が成り立つ。

$$\Pi_d = \Pi_i \quad (3.43)$$

式 (3.41) を用いると、散逸エネルギー Π_d は次式のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \Pi_d &= \text{Re} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e^{*T} & \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} & \mathbf{U}_s^{*T} & \boldsymbol{\Psi}_f^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e^{*T} & \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} & \mathbf{U}_s^{*T} & \boldsymbol{\Psi}_f^{*T} \end{bmatrix} \mathbf{D}_d \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Psi}_a \\ \mathbf{U}_s \\ \boldsymbol{\Psi}_f \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

ただし、

$$\mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e & -j\omega \mathbf{C}_{ea} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ j\omega \mathbf{C}_{ea}^T & -\mathbf{K}_a + \omega^2 \mathbf{M}_a & j\omega \mathbf{C}_{sa} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -j\omega \mathbf{C}_{sa}^T & \mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s & j\omega \mathbf{C}_{vl} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -j\omega \mathbf{C}_{vl}^T & -\mathbf{K}_f + \omega^2 \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

式 (3.45) において、マトリックス \mathbf{D}_d の2行目と4行目は、式 (3.41) と比較して符号を逆にする必要があることに注意する。エネルギーは非負の物理量で、マトリックスの成分は非負数でなければならないからである。さらに展開すると次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \Pi_d = \text{Re} \Big\{ & -j\omega \mathbf{U}_e^{*T} (\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{U}_e + \omega^2 \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} \mathbf{C}_{ea}^T \mathbf{U}_e - \omega^2 \mathbf{U}_e^{*T} \mathbf{C}_{ea} \boldsymbol{\Psi}_a \\ & + j\omega \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} (\mathbf{K}_a - \omega^2 \mathbf{M}_a) \boldsymbol{\Psi}_a - \omega^2 \mathbf{U}_s^{*T} \mathbf{C}_{sa}^T \boldsymbol{\Psi}_a + \omega^2 \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} \mathbf{C}_{sa} \mathbf{U}_s \\ & - j\omega \mathbf{U}_s^{*T} (\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) \mathbf{U}_s - \omega^2 \boldsymbol{\Psi}_f^{*T} \mathbf{C}_{vl}^T \mathbf{U}_s + \omega^2 \mathbf{U}_s^{*T} \mathbf{C}_{vl} \boldsymbol{\Psi}_f \\ & + j\omega \boldsymbol{\Psi}_f^{*T} (\mathbf{K}_f - \omega^2 \mathbf{M}_f) \boldsymbol{\Psi}_f \Big\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

連成マトリックス \mathbf{C}_{ea} と \mathbf{C}_{sa} は成分が全て実数のマトリックスであるため $\boldsymbol{\Psi}_a^{*T} \mathbf{C}_{ea}^T \mathbf{U}_e - \mathbf{U}_e^{*T} \mathbf{C}_{ea} \boldsymbol{\Psi}_a$ と $\mathbf{U}_s^{*T} \mathbf{C}_{sa}^T \boldsymbol{\Psi}_a - \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} \mathbf{C}_{sa} \mathbf{U}_s$ の実数成分はゼロになることを考慮すると、散逸エネルギーの分布を示す次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \Pi_d = \text{Re} \Big\{ & -j\omega \mathbf{U}_e^{*T} (\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{U}_e + j\omega \boldsymbol{\Psi}_a^{*T} (\mathbf{K}_a - \omega^2 \mathbf{M}_a) \boldsymbol{\Psi}_a \\ & - j\omega \mathbf{U}_s^{*T} (\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) \mathbf{U}_s + j\omega \boldsymbol{\Psi}_f^{*T} (\mathbf{K}_f - \omega^2 \mathbf{M}_f) \boldsymbol{\Psi}_f \\ & + \omega^2 \mathbf{U}_s^{*T} \mathbf{C}_{vl} \boldsymbol{\Psi}_f - \omega^2 \mathbf{U}_s^T \mathbf{C}_{vl} \boldsymbol{\Psi}_f^* \Big\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.2 伝達マトリックスを適用した近似解法

偏微分方程式の数値解法において、有限要素法では、境界条件を満たす関数の線形和で解を表現し、弱形式の意味で偏微分方程式を満たすような関数の係数すなわち節点値を求める。これに対して、偏微分方程式を満たす基本解を用いた級数和により解を表現し、境界条件を満たすように級数和の係数を決定する手法が考えられる。

本節では、図 3.1 のように、多孔質体を含む吸遮音構造物が構造と音場の境界面に配置された系の動的応答を求める際に、多孔質体が満たすヘルムホルツ方程式の基本解を用い、計算の精度と時間をバランスさせた新しい近似計算手法を提案する。ここでは、吸遮音構造物は積層型で、各層の厚さが平面的な大きさに比して小さく、厚さ方向の波動伝播が支配的であると仮定する。そして吸遮音構造物を、多孔質体のヘルムホルツ方程式の基本解から導いた一次元伝達マトリックスにより表現する。吸遮音構造物が構造と音場の固有モード形状に大きな影響を与えなければ、構造と音場の非連成固有モードを用いて伝達マトリックスを構造と音場のモード座標系で表し、近似的にモード修正法を適用して解くことができる。

3.2.1 多孔質体のヘルムホルツ方程式

前述したように、多孔質体の応力-歪み関係式は次式で与えられる.

$$\sigma_{ij}^s = \left\{ (P - 2N)\varepsilon_{kk}^s + Q\varepsilon_{kk}^f \right\} \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^s \quad (3.48)$$

$$\sigma_{ij}^f = \left(Q\varepsilon_{kk}^s + R\varepsilon_{kk}^f \right) \delta_{ij} \quad (3.49)$$

これらの関係式を以下の多孔質体の運動方程式

$$-\omega^2(\rho^{sc}u_i^s + \rho^{cc}u_i^f) = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} \quad (3.50)$$

$$-\omega^2(\rho^{cc}u_i^s + \rho^{fc}u_i^f) = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} \quad (3.51)$$

に代入すると、次式で示す Navier の方程式を得ることができる.

$$-\omega^2(\rho^{sc}\mathbf{u}^s + \rho^{cc}\mathbf{u}^f) = (P - N)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + N\nabla^2\mathbf{u}^s \quad (3.52)$$

$$-\omega^2(\rho^{fc}\mathbf{u}^f + \rho^{cc}\mathbf{u}^s) = R\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}^s \quad (3.53)$$

ここで、固体相および流体相の変位スカラーポテンシャル ψ^s , ψ^f と、各相の変位ベクトルポテンシャル Ψ^s , Ψ^f を用いると、各相の変位は次式で表すことができる.

$$\mathbf{u}^s = \nabla\psi^s + \nabla \times \Psi^s \quad (3.54)$$

$$\mathbf{u}^f = \nabla\psi^f + \nabla \times \Psi^f \quad (3.55)$$

これらを Navier の方程式に代入すると、4つのヘルムホルツ方程式を得ることができる.

$$-\omega^2(\rho^{sc}\psi^s + \rho^{cc}\psi^f) = P\nabla^2\psi^s + Q\nabla^2\psi^f \quad (3.56)$$

$$-\omega^2(\rho^{cc}\psi^s + \rho^{fc}\psi^f) = Q\nabla^2\psi^s + R\nabla^2\psi^f \quad (3.57)$$

$$-\omega^2(\rho^{sc}\Psi^s + \rho^{cc}\Psi^f) = N\nabla^2\Psi^s \quad (3.58)$$

$$-\omega^2(\rho^{cc}\Psi^s + \rho^{fc}\Psi^f) = 0 \quad (3.59)$$

最初の2つの式が圧縮波に関するもので、後の2つの式がせん断波に関するものである.

3.2.2 圧縮波に関するヘルムホルツ方程式の一般解

まず、圧縮波に関するヘルムホルツ方程式の一般解を求める. 式 (3.56), (3.57) は、連成項を含んでいるため、連立して解く必要がある. これらの式を以下のように書きなおす.

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \psi^s \\ \psi^f \end{bmatrix} = -\frac{\omega^2}{PR - Q^2} \begin{bmatrix} R & -Q \\ -Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{sc} & \rho^{cc} \\ \rho^{cc} & \rho^{fc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^s \\ \psi^f \end{bmatrix} = -\mathbf{M} \begin{bmatrix} \psi^s \\ \psi^f \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

ここで, k_1^2, k_2^2 を \mathbf{M} の固有値, $[1 \ \mu_1]^T, [1 \ \mu_2]^T$ を固有ベクトルとすると, 上式の解 $\psi_1^s, \psi_2^s, \psi_1^f, \psi_2^f$ は以下の4つの式を満たすように求めればよい.

$$\nabla^2 \psi_1^s = -k_1^2 \psi_1^s \quad (3.61)$$

$$\nabla^2 \psi_2^s = -k_2^2 \psi_2^s \quad (3.62)$$

$$\psi_1^f = \mu_1 \psi_1^s \quad (3.63)$$

$$\psi_2^f = \mu_2 \psi_2^s \quad (3.64)$$

これらの一般解は, A_1, A_2, A'_1, A'_2 を任意係数として次式のように求められる.

$$\psi_1^s = A_1 e^{-j(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3)} + A'_1 e^{j(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3)} \quad (3.65)$$

$$\psi_2^s = A_2 e^{-j(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3)} + A'_2 e^{j(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3)} \quad (3.66)$$

$$\psi_1^f = \mu_1 \left\{ A_1 e^{-j(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3)} + A'_1 e^{j(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3)} \right\} \quad (3.67)$$

$$\psi_2^f = \mu_2 \left\{ A_2 e^{-j(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3)} + A'_2 e^{j(k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3)} \right\} \quad (3.68)$$

ただし, $k_1^2 = k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2, k_2^2 = k_{21}^2 + k_{22}^2 + k_{23}^2$ である. 以下では k_1, k_2, μ_1, μ_2 の具体的な表現式を求めておく. いま, 行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R & -Q \\ -Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{sc} & \rho^{cc} \\ \rho^{cc} & \rho^{fc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\rho^{sc} - Q\rho^{cc} & R\rho^{cc} - Q\rho^{fc} \\ P\rho^{cc} - Q\rho^{sc} & P\rho^{fc} - Q\rho^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

の固有値を λ_1^2, λ_2^2 とすると, k_1^2, k_2^2 との間に次の関係式が成り立つ.

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{PR - Q^2} \lambda_1^2 \quad (3.70)$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{PR - Q^2} \lambda_2^2 \quad (3.71)$$

また, \mathbf{A} の固有値は容易に次式で求めることができる.

$$\lambda_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (3.72)$$

ここで, a_{ij} は行列 \mathbf{A} の i 行 j 列成分である. なお, $a_{11} + a_{22}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ は, P, Q, R および $\rho^{sc}, \rho^{fc}, \rho^{cc}$ との間に以下の関係が成り立っていることに注意する.

$$a_{11} + a_{22} = \text{tr}(\mathbf{A}) = R\rho^{sc} + P\rho^{fc} - 2Q\rho^{cc} \quad (3.73)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(\mathbf{A}) = (PR - Q^2)(\rho^{sc}\rho^{fc} - \rho^{cc2}) \quad (3.74)$$

また, μ_i については $\psi_i^f = \mu_i \psi_i^s$ をもとのヘルムホルツの方程式に代入することにより次式で求められる.

$$\mu_i = \frac{Pk_i^2 - \rho^{sc}\omega^2}{\rho^{cc}\omega^2 - Qk_i^2} \quad (i = 1, 2) \quad (3.75)$$

3.2.3 せん断波に関するヘルムホルツ方程式の一般解

せん断波に関しても連成項を含んでいるため、二つのヘルムホルツ方程式を連成して解く必要があるが、

$$\Psi^f = -\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}}\Psi^s = -\mu_3\Psi^s \quad (3.76)$$

の関係式を用いて Ψ^f を消去すると、次式のように単一の方程式となる。

$$-\frac{\omega^2}{N} \frac{\rho^{sc}\rho^{fc} - \rho^{cc2}}{\rho^{fc}}\Psi^s = \nabla^2\Psi^s \quad (3.77)$$

この一般解は $\mathbf{A}_3 = [A_{31} \ A_{32} \ A_{33}]^T$ および $\mathbf{A}'_3 = [A'_{31} \ A'_{32} \ A'_{33}]^T$ を任意係数として次式のように容易に求めることができる。

$$\Psi_3^s = \mathbf{A}_3 e^{-j(k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3)} + \mathbf{A}'_3 e^{j(k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3)} \quad (3.78)$$

$$\Psi_3^f = \mu_3 \left\{ \mathbf{A}_3 e^{-j(k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3)} + \mathbf{A}'_3 e^{j(k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3)} \right\} \quad (3.79)$$

ただし、 k_3 は波数ベクトルの大きさ、 k_{31} , k_{32} , k_{33} は波数ベクトルの各方向成分で以下の関係式を満たす。

$$k_3^2 = \frac{\omega^2}{N} \frac{\rho^{sc}\rho^{fc} - \rho^{cc2}}{\rho^{fc}} \quad (3.80)$$

$$k_3^2 = k_{31}^2 + k_{32}^2 + k_{33}^2 \quad (3.81)$$

3.2.4 一次元の伝達マトリックス

図 3.2 に示すように、吸遮音構造物は積層型で、各層の厚さが平面的な大きさに比して小さく、厚さ方向の圧縮波による伝播が支配的であると仮定する。まず、多孔質体層の表面にとった点 A ($x = a$)、点 B ($x = b$) 間の伝達マトリックス $\mathbf{\Gamma}_{AB}$ を導出する。

多孔質体層中の固体相および流体相の速度 v^s, v^f 、応力 σ^s, σ^f は ϕ_i, ϕ'_i ($i = 1, 2$) を任意係数としてそれぞれ以下のように書ける。

$$v^s(x) = \sum_{i=1}^2 (\phi_i e^{-jk_i x} - \phi'_i e^{jk_i x}) \quad (3.82)$$

$$v^f(x) = \sum_{i=1}^2 \mu_i (\phi_i e^{-jk_i x} - \phi'_i e^{jk_i x}) \quad (3.83)$$

$$\sigma^s(x) = \sum_{i=1}^2 -z_i^s (\phi_i e^{-jk_i x} + \phi'_i e^{jk_i x}) \quad (3.84)$$

$$\sigma^f(x) = \sum_{i=1}^2 -\phi \mu_i z_i^f (\phi_i e^{-jk_i x} + \phi'_i e^{jk_i x}) \quad (3.85)$$

ここで, z_i^s, z_i^f はそれぞれ固体相および流体相の特性インピーダンスであり次式で表される.

$$z_i^s = (P + \mu_i Q) \frac{k_i}{\omega} \quad (3.86)$$

$$z_i^f = (R + \frac{Q}{\mu_i}) \frac{k_i}{\phi \omega} \quad (3.87)$$

今, $V(x), V_0$ を

$$V(x) = [v^s(x) \ v^f(x) \ \sigma^s(x) \ \sigma^f(x)]^T \quad (3.88)$$

$$V_0 = [\phi_1 \ \phi_1' \ \phi_2 \ \phi_2']^T \quad (3.89)$$

と定義すると, 式 (3.82)~(3.85) は次式にまとめられる.

$$V(x) = \Gamma(x) V_0 \quad (3.90)$$

ここで $\Gamma(x)$ は次式で示す 4 行 4 列 のマトリックスである.

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} e^{-jk_1 x} & -e^{jk_1 x} & e^{-jk_2 x} & -e^{jk_2 x} \\ \mu_1 e^{-jk_1 x} & -\mu_1 e^{jk_1 x} & \mu_2 e^{-jk_2 x} & -\mu_2 e^{jk_2 x} \\ -z_1^s e^{-jk_1 x} & -z_1^s e^{jk_1 x} & -z_2^s e^{-jk_2 x} & -z_2^s e^{jk_2 x} \\ -\phi \mu_1 z_1^f e^{-jk_1 x} & -\phi \mu_1 z_1^f e^{jk_1 x} & -\phi \mu_2 z_2^f e^{-jk_2 x} & -\phi \mu_2 z_2^f e^{jk_2 x} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

点 A, B に対して適用すると, $V(a) = \Gamma(a) V_0, V(b) = \Gamma(b) V_0$ であるから, $V(a)$ は $V(b)$ を用いて以下のように表せる.

$$V(a) = \Gamma(a) \Gamma(b)^{-1} V(b) \quad (3.92)$$

したがって, 点 AB 間の伝達マトリックス Γ_{AB} は 4 行 4 列 のマトリックスとして次式のように求められる.

$$\Gamma_{AB} = \Gamma(a) \Gamma(b)^{-1} \quad (3.93)$$

吸遮音構造物で使用する多孔質体は, その構成要素である別の多孔質体や弾性体, あるいは隣接する構造物や音場と接している. 多孔質体と接する場合は, 式 (3.91) の形の伝達マトリックスが適用できる. しかし, 弾性体や空気と接する場合は, 接する弾性体や空気と連続になる有効速度 v^p および有効応力 σ^p を用いて伝達マトリックスを表現しておく, 伝達マトリックス間の演算や境界条件の考慮が容易になり利便性がよい.

v^p, σ^p は多孔質体表面における通気性の有無により異なる. 通気性の無い表面では, 多孔質体の固体相と流体相の速度が等しいことから, 次の関係式が成り立つ.

$$v^s - v^f = 0 \quad (3.94)$$

$$v^s = v^p \quad (3.95)$$

$$\sigma^s + \sigma^f = \sigma^p \quad (3.96)$$

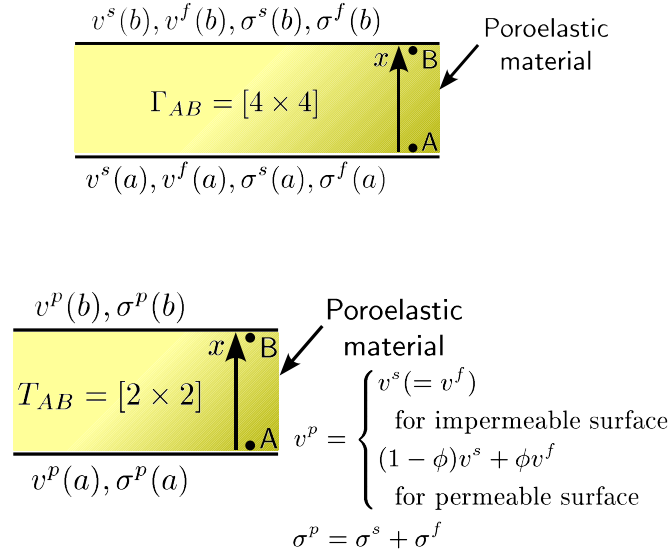


Fig. 3.2 Transfer matrix of poroelastic material.

一方、通気性の有る表面では、体積保存則を考慮すると次の関係式が成り立つ。

$$\phi \sigma^s - (1 - \phi) \sigma^f = 0 \quad (3.97)$$

$$(1 - \phi) v^s + \phi v^f = v^p \quad (3.98)$$

$$\sigma^s + \sigma^f = \sigma^p \quad (3.99)$$

ここで、 $\mathbf{V}^p(x)$ を

$$\mathbf{V}^p(x) = [0 \quad v^p(x) \quad \sigma^p(x)]^T \quad (3.100)$$

と定義すると、次式にまとめることができる。

$$\mathbf{V}^p(x) = \mathbf{H} \mathbf{V}(x) \quad (3.101)$$

ただし、 \mathbf{H} は多孔質体表面における通気性の有無により、次のいずれかのマトリックスとなる。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ または } \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi & -(1-\phi) \\ 1-\phi & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

点 A で \mathbf{H}_A 、点 B で \mathbf{H}_B であるとする、次の関係式が得られる。

$$\mathbf{V}^p(a) = \mathbf{H}_A \mathbf{V}(a) \quad (3.103)$$

$$\mathbf{V}^p(b) = \mathbf{H}_B \mathbf{V}(b) \quad (3.104)$$

式 (3.92), (3.103), (3.104) を連立させ $v^p(a)$, $\sigma^p(a)$ について解くと、次式の間係を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} v^p(a) \\ \sigma^p(a) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{AB} \begin{bmatrix} v^p(b) \\ \sigma^p(b) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

ここで, \mathbf{T}_{AB} は 2 行 2 列 の伝達マトリックスで, 図 3.2(b) にも示すように, 式 (3.93) の伝達マトリックス \mathbf{T}_{AB} を通気性の境界条件を用いて縮約したものに他ならない. \mathbf{T}_{AB} を用いれば, 空気層などに関する伝達マトリックスとの積を計算するだけで, 吸遮音構造全体としての伝達マトリックスを得ることができる. さらに, 相対する弾性体構造や音場との境界条件も容易に構成できる.

3.2.5 構造・音場連成系における境界条件への適用

図 3.3 に示すように, 弾性体からなる構造 Ω^e と音場 Ω^a の境界面 Γ^t に配置された吸遮音構造物について, 局所的に境界面法線方向の振動が支配的で, 接線方向の挙動は法線方向の挙動に比して無視できるものと仮定すると, 提案する一次元の伝達マトリックスで吸遮音構造物の伝達特性を近似的に表すことができる. なお, 図 3.3 では多孔質体層と弾性体表皮層から構成される二層構造の場合について描いているが, 任意の層数および材料からなる吸遮音構造物の場合でも, 全く同じ議論が成り立つ.

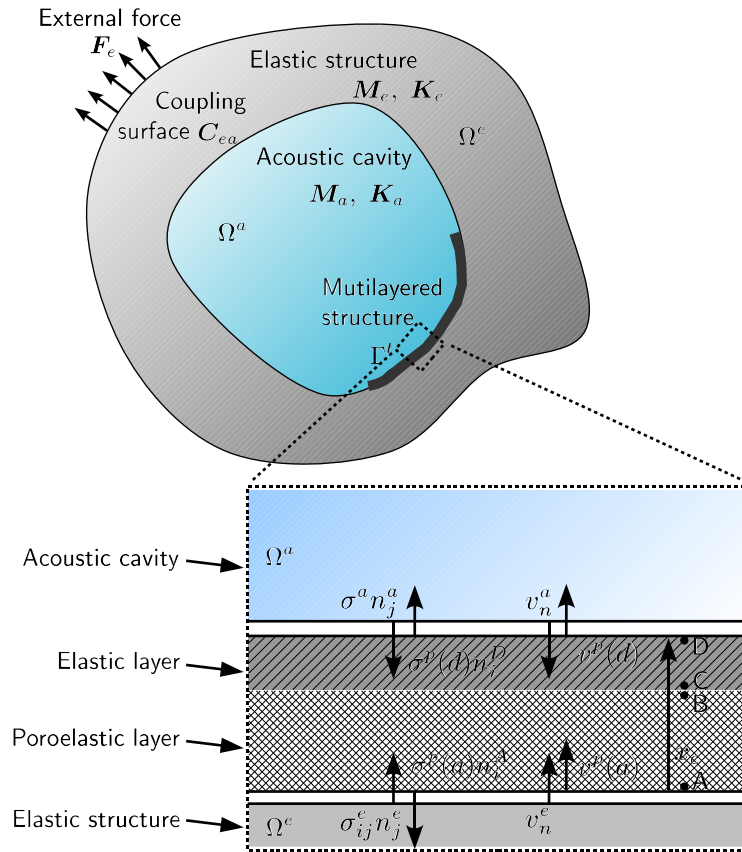


Fig. 3.3 Boundary conditions for coupled system.

吸遮音構造物中に境界面法線方向に設定した局所座標系 x_c において, 点 A, D の座標をそれぞれ

$x_c = a, d$ とすると、点 A, D における法線方向の速度と応力の連続条件は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} v_n^e \\ \sigma_{ij}^e n_j^e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & n_i^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^p(a) \\ \sigma^p(a) \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$$\begin{bmatrix} v_n^a \\ \sigma^a n_i^a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_i^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^p(d) \\ \sigma^p(d) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

ここで、 v_n^e, v_n^a はそれぞれ構造 Ω^e 、音場 Ω^a の境界面法線方向の速度、 σ_{ij}^e, σ^a は応力、 n_i^e, n_i^a は境界外向きの単位法線ベクトルを表す。また、 n_i^A, n_i^D はそれぞれ点 A, D における境界外向きの単位法線ベクトルである。

図 3.3 において、AB 間および CD 間の伝達マトリックスをそれぞれ $\mathbf{T}_{AB}, \mathbf{T}_{CD}$ とすると AD 間の伝達マトリックスは $\mathbf{T}_{AD} = \mathbf{T}_{AB}\mathbf{T}_{CD}$ となり、次式のように書ける。

$$\begin{bmatrix} v^p(a) \\ \sigma^p(a) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{AD} \begin{bmatrix} v^p(d) \\ \sigma^p(d) \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

ここで、 \mathbf{T}_{AD} の成分表示を

$$\mathbf{T}_{AD} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

とし、単位法線ベクトルに関して $n_i^e = -n_i^a = -n_i^A = n_i^D$ が成り立つこと、相反性より $|\mathbf{T}_{AD}|=1$ が成り立つことに注意すると、式 (3.106)～(3.108) から $v^p(a), \sigma^p(a), v^p(d), \sigma^p(d)$ を消去することができ、次の関係式を得ることができる。

$$v_n^a = -\frac{1}{t_{11}}v_n^e + \frac{t_{12}}{t_{11}}j\omega\phi^a \quad (3.110)$$

$$\sigma_{ij}^e n_j^e = \frac{t_{21}}{t_{11}}v_n^e n_i^e + \frac{1}{t_{11}}j\omega\phi^a n_i^e \quad (3.111)$$

ここで、 ϕ^a は音場のポテンシャル関数で、 $\sigma^a = j\omega\phi^a$ により定義している。

上式を吸遮音構造物が配置された連成面における境界条件として、構造・音場連成系の平衡方程式の弱形式に適用し、有限要素法により離散化すると次式が得られる。

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_a \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C}_{ea} \\ \mathbf{C}_{ea}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Phi}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

ここで、 \mathbf{C}_1 は吸遮音構造物がある連成面 Γ^t の連成マトリックス、 $\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ は同じく連成面 Γ^t のインピーダンスマトリックスでそれぞれ次式で表される。

$$\mathbf{C}_1 = \sum_i \int_{\Gamma^{t_i}} \frac{1}{t_{11}} \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}_e \mathbf{N}_a d\Gamma \quad (3.113)$$

$$\mathbf{C}_2 = \sum_i \int_{\Gamma^{t_i}} \frac{t_{21}}{t_{11}} \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}_e \mathbf{n}_e^T \mathbf{N}_e d\Gamma \quad (3.114)$$

$$\mathbf{C}_3 = \sum_i \int_{\Gamma^{t_i}} -\frac{t_{12}}{t_{11}} \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_a d\Gamma \quad (3.115)$$

ここで, N_e , N_a はそれぞれ構造 Ω^e , 音場 Ω^a の内挿関数, n_e は連成面の構造側に立てた外向き単位法線ベクトルである.

式 (3.112) より, 吸遮音構造物がない場合の問題に対して, C_1 , C_2 , C_3 で構成されるマトリックスを追加することで吸遮音構造物がある場合の問題を表現できることが分かる. また, C_2 , C_3 による固有モードベクトルの変化を無視できるものとすれば, 構造および音場の非連成固有振動数および固有モードベクトルを用いたモード修正法が適用でき, 計算時間を大幅に短縮することができる.

3.3 実験検証

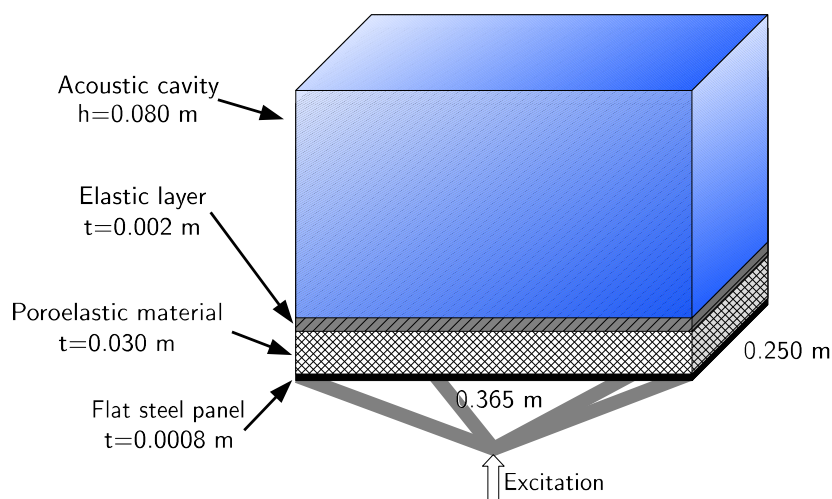


Fig. 3.4 Analyzed coupled system.

3.3.1 対象の系

まず, 実験値と詳細な形状および境界条件が表現できる有限要素法による計算結果を比較することで, Biot のモデルを吸音材に適用したときの予測精度を検証する. 図 3.4 に示すように, スチールの平板上に吸遮音構造物と音場を有する系を対象にして, 計算値と実験値の比較を行う. 大きさ $0.365 \text{ m} \times 0.250 \text{ m}$, 厚さ 0.0008 m の平板を, 質量と剛性が平板に比して十分大きい加振台に全周完全固定し, 吸遮音構造物と音場を平板の上に組み合わせる. 吸遮音構造物は多孔質体層と弾性体表皮層からなる二層構造とし, 多孔質体層の厚さは 0.030 m , 弾性体表皮層の厚さは 0.002 m とする. また, 音場の高さは 0.080 m とし, 吸遮音構造物に接する面以外は剛壁境界条件が成り立つとする. 加振台の中央を力加振し, 平板中央の振動および音場中央の音圧で評価するものとする.

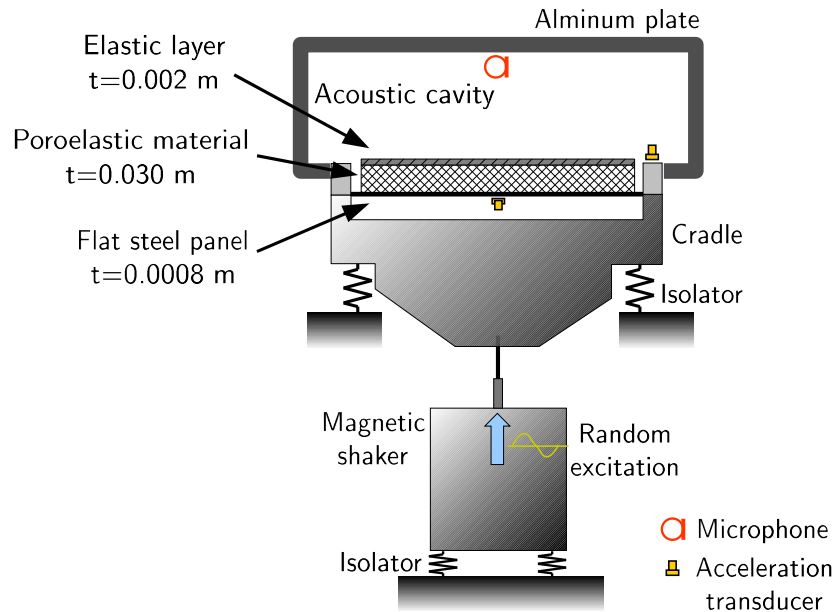


Fig. 3.5 Schematic view of testrig.

3.3.2 実験装置

図 3.5 に対象の系を具現化する実験装置の概略図を示す。また、図 3.6 には実際に実験した装置全体の写真を示す。図 3.7 に示すように、加振台はアルミニウムの中実構造とし、平板に比して十分な剛性を持たせた。実際に測定した結果、フリーフリーの状態での一次（ねじりモード）固有振動数は約 2.3 kHz であった。多孔質体層には吸音材として代表的なポリウレタンフォームを使用した。また、弾性体表皮層には自動車用の遮音材として代表的なオレフィンシートを使用した。また、多孔質体層と弾性体表皮層は予め接着しておき、平板と吸遮音構造物を接着する場合は両面接着テープを用いた。また、0.030 m のアルミ板を用いて平板上方の音場を囲い、大きさ 0.455 m × 0.340 m、高さ 0.080 m の音場を形成している。音場境界における剛壁条件を実現するため、加振台の振動がアルミ板に伝達されないよう、加振台との間に微小な隙間を設けている。しかし、隙間をそのままにしておくと装置外部のノイズが音場に侵入するため、薄いビニールテープで隙間を塞いでいる。図 3.8 は実験装置の内部を写したもので、吸遮音構造物を設置したときの状況を示している。

3.3.3 有限要素モデル

図 3.9 に実験装置を再現する有限要素モデルを示す。対象の系の中央に関して対称な振動および音響モードのみが励起されるため、系の 1/4 部のみを要素分割し、対称面には対称境界条件を付加している。また、加振台を十分に大きな剛性を有する平板としてモデル化することで系の自由度を抑えており、全体では 29,929 節点、6,606 要素である。なお、要素は六面体二次アイソパラメトリック要素を用い

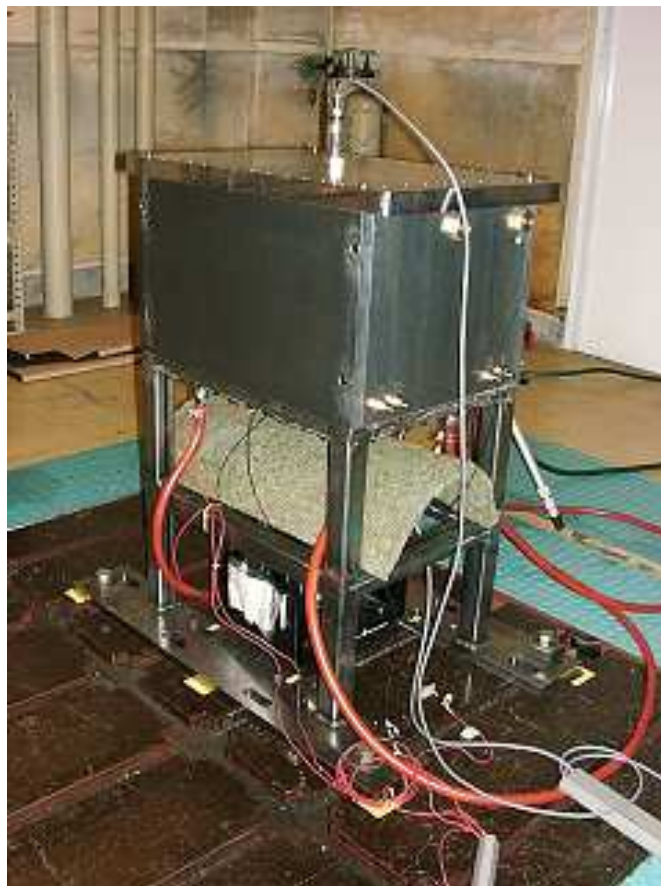


Fig. 3.6 Set up of measurement.

ている．また，表 3.1 は Biot のモデルでの計算に必要なポリウレタンフォームの物性値とオレフィンシートの物性値を示す．

3.3.4 Biot モデルによる予測精度の検証

図 3.10 は，平板のみの場合の結果で，上側が平板中央の振動，下側が音場中央の音圧の応答を示している．図中で実線が実験値，点線が計算値である．770 Hz および 930 Hz の音場の共鳴によるピークを除き，全て平板の共振によるピークで 1kHz までに 8 つ存在している．実験値と計算値は良く一致しており，実験装置に問題ないことが確認できる．

図 3.11 は平板と吸遮音構造物を両面テープで接着させた場合の振動と音圧の応答である．この場合，平板と接着されるのは，吸遮音構造物の多孔質体層であることに注意する．750 Hz 以上の応答レベルに若干の差はあるが，それ以下の周波数では良く一致している．750 Hz 以上でのレベル差は平板と吸遮音構造物の接着が十分でないことが一因と考えられる．

一方，図 3.12 は平板に吸遮音構造物をのせた場合の振動と音圧の応答である．800 Hz から 850 Hz で若干のレベル差が生じている以外は非常に良く一致している．多孔質体層の平板に接する表面は，通



Fig. 3.7 Cradle for steel panel to be clamped.

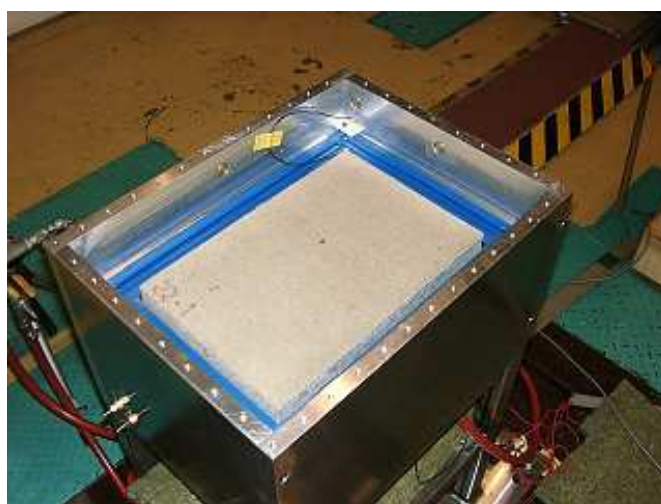


Fig. 3.8 Inside view of testrig.

気性を持つため、平板の面外振動はいったん音圧および空気の粒子速度に変換されてから多孔質体に伝達されると推測できる。体積保存則と応力および音圧の連続条件を考慮すると、平板と多孔質体層の間に薄い空気層を入れることでこれらの条件を近似的に満足させることができる。図 3.12 の計算ではこのモデル化を用いている。なお、平板面内方向の振動伝達は考慮していないが、計算値と実験値がおおむね一致していることから、面内方向の振動は寄与が小さいと推測される。

以上の結果から、多孔質体層と弾性体表皮層の二層からなる吸遮音構造物を、平板に付加したことによる平板の振動および音圧への効果は、Biot のモデルにより定量的に表せることが確認できた。また、平板と多孔質体層が非接着の場合は、平板と多孔質体層の間に設けた薄い空気層により表現できることを確認した。

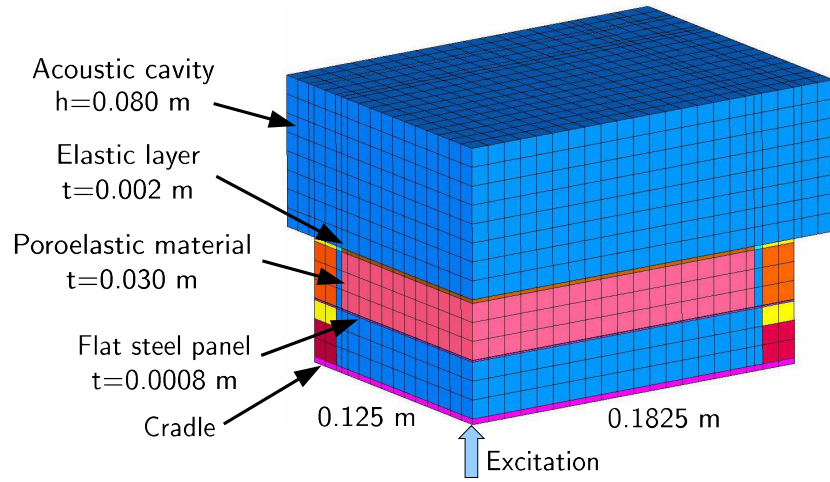


Fig. 3.9 Finite element model for testrig.

Table 3.1 Parameters for polyurethane foam and olefin sheet.

Parameters			Polyurethane foam	Olefin sheet
Young's modulus	E^s	[Pa]	2.67×10^5	1.75×10^8
Loss factor	η^s	[-]	0.11	0.205
Density	ρ^s	[kg/m ³]	1433.	1790.
Poisson's ratio	ν^s	[-]	0.4	0.4
Porosity	ϕ	[-]	0.97	—
Tortuosity	α_∞	[-]	2.5	—
Flow resistivity	σ	[Ns/m ⁴]	7.0×10^4	—
Viscous characteristic length	Λ	[m]	3.6×10^{-5}	—
Thermal characteristic length	Λ'	[m]	1.7×10^{-4}	—

3.4 数値例による提案手法の検証

3.4.1 計算精度についての検証

図 3.4 に示す系を対象に，吸遮音構造物に伝達マトリックスを適用した提案手法による計算結果と，有限要素法による計算結果を比較し検証する．吸遮音構造物は前節における構成と同じものを使用する．なお，平板の境界条件は検討を簡易にするため全周単純支持とし，平板の中央に単位周期加振力を

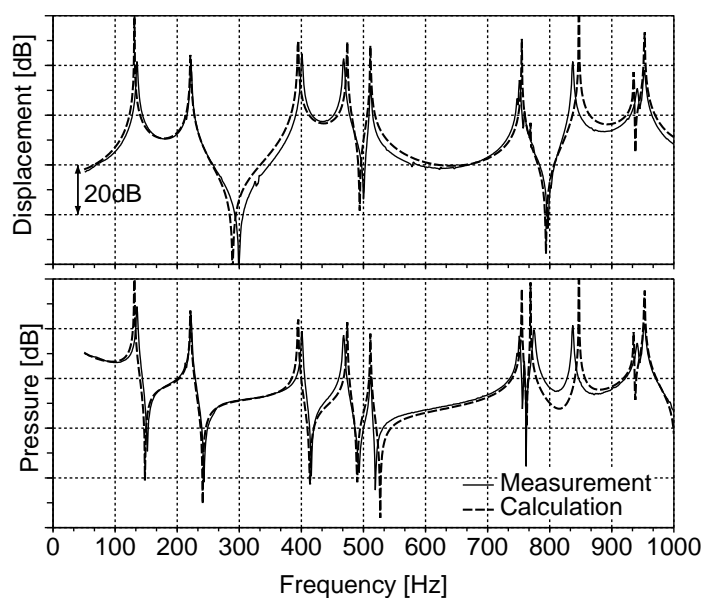


Fig. 3.10 Frequency response of flat bare panel.

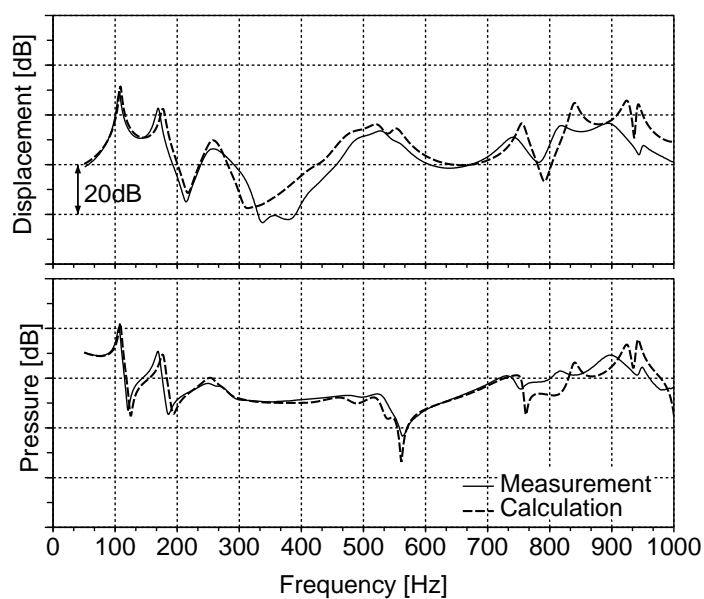


Fig. 3.11 Frequency response of flat panel glued with poroelastic material.

与える．

図 3.13 は平板と吸遮音構造物を接着させない場合の、平板中央の振動と音場中央の音圧応答を示している．実線が有限要素法による計算値、点線が提案手法による計算値である．なお、薄い実線で平板のみの場合の応答を参考に表示している．音場の一次共鳴周波数 930 Hz におけるピークを除き、全て平板の共振周波数におけるピークで 1 kHz までに 9 つ存在している．150 Hz 付近で有限要素法によ

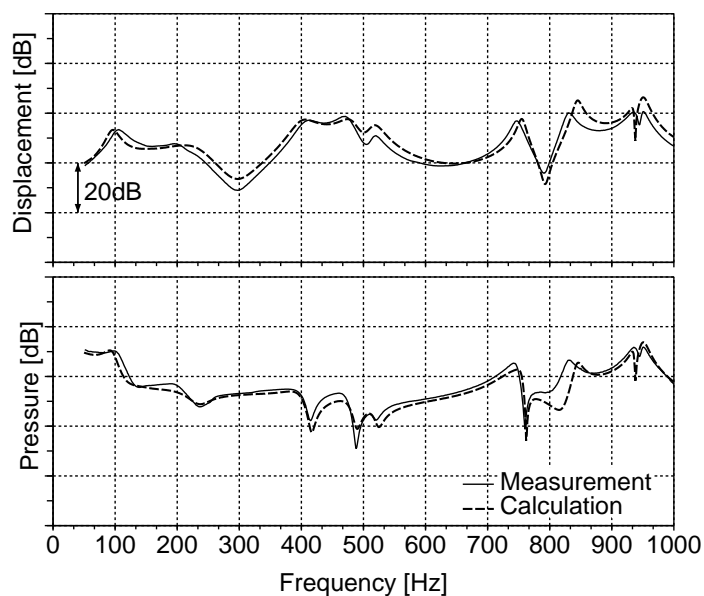


Fig. 3.12 Frequency response of flat panel unglued with poroelastic material.

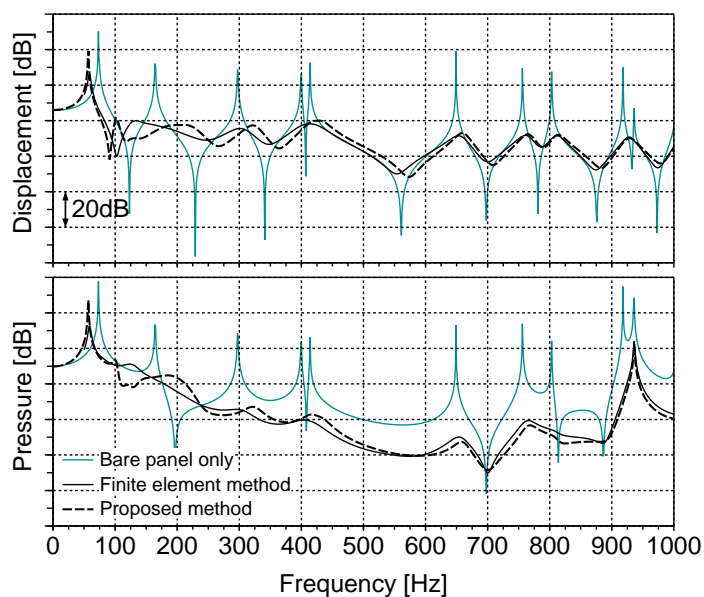


Fig. 3.13 Frequency response of flat panel unglued with poroelastic material.

る計算結果と、提案手法による計算結果に若干のレベル差が生じているが、その他の周波数域において両者は良く一致しており、実用上は十分な精度であると考えられる。

一方、図 3.14 は平板と吸遮音構造物を接着させた場合の振動と音圧の応答を示している。有限要素法による計算結果と提案手法による計算結果には大きな差が生じている。これは平板に接着されている吸遮音構造物のせん断剛性が系全体の特性に大きく影響するからである。この場合は、提案手法の仮定

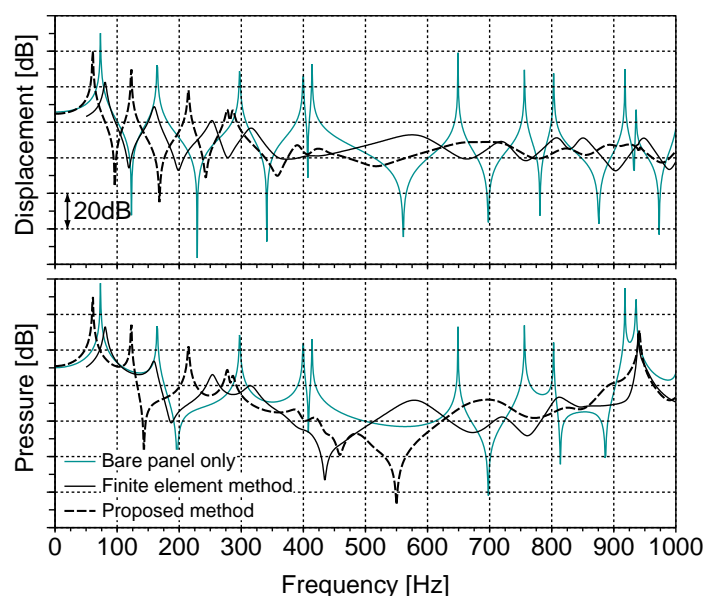


Fig. 3.14 Frequency response of flat panel glued with poroelastic material.

が満たされないので、有限要素法による詳細な計算が必要となる。しかし、自動車に使用されている吸遮音構造物は、通常、車体パネルと接着されることはないため、提案手法は十分適用可能と考えられる。

3.4.2 計算時間についての検証

有限要素法による計算の場合、直接周波数応答の高速近似解法である Krylov 法 [44] を適用しても約 8700 秒を要した。それに対して提案手法による計算の場合、固有振動数および固有モードの計算に約 180 秒（平板については 19 個、音場については 25 個の固有モードを抽出）、モード修正法を適用した周波数応答の計算に約 30 秒を要した。したがって、全体の計算時間はおよそ 1/40 に短縮できている。なお、計算時間は IBM POWER4 (1.7GHz) を使用したときのものである。

図 3.4 に示すような比較的小さい自由度で表現可能な対象物であれば、有限要素法による直接周波数応答計算も可能である。しかし、吸遮音材を含む自動車の車体構造のように、大きな自由度を持つ計算モデルに対しては、計算時間の短縮によるメリットは実用上非常に大きく、モデル精度と計算時間のトレードオフをバランスさせた提案手法は有効であると考えられる。

3.5 まとめ

本章では構造と音場の境界面に配置された、多孔質体を含む吸遮音構造物の効果を考慮するため、計算の精度と時間をバランスさせた近似計算手法を提案するとともに、簡単な数値例により手法の有効性を検証した。結果を以下に示す。

- (1) 多孔質体層と弾性体表皮層の二層からなる吸遮音構造物を、平板に付加した場合の平板の振動お

よび音圧への効果は，多孔質体に Biot のモデルを適用した計算で，定量的に表せることを実験結果と比較し確認した．また，平板と多孔質体が非接着の場合，平板と多孔質体の間に薄い空気層を入れることで表現できることを確認した．

- (2) 構造と音場の境界面上にある多孔質体を含む吸遮音構造物について，境界面法線方向の挙動が支配的であると仮定し，一次元ヘルムホルツ方程式の解による伝達マトリックスを用いた近似計算手法を提案した．
- (3) 簡単な数値例により提案手法の検証を行い，平板と吸遮音構造物が非接着の場合には実用上十分な精度で計算できることを示した．また，計算時間は有限要素法による計算に比して約 $1/40$ に短縮できることを確認した．

第 4 章

最適設計手法

本章では、まず構造最適化の類別とその特徴について簡単に紹介した後、本研究の基本的なアプローチであるトポロジー最適化手法について概説する。また、トポロジー最適化と板厚分布の最適化の類似性について説明する。

4.1 構造最適化



Fig. 4.1 Example of beam clamped at an end and loaded at the other end.

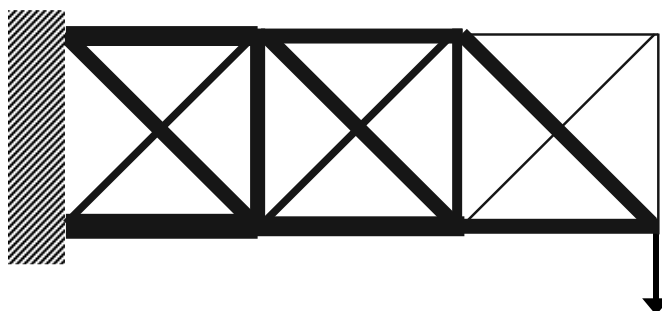


Fig. 4.2 Sizing optimization.



Fig. 4.3 Shape optimization.

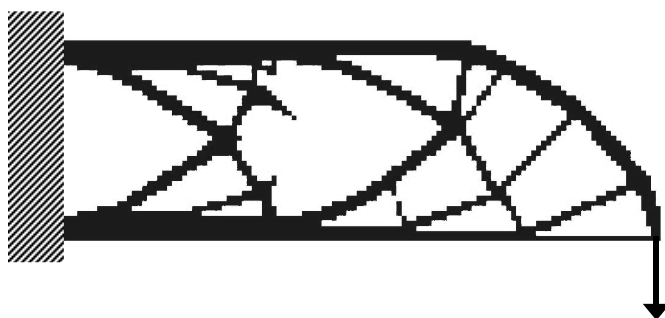


Fig. 4.4 Topology optimization.

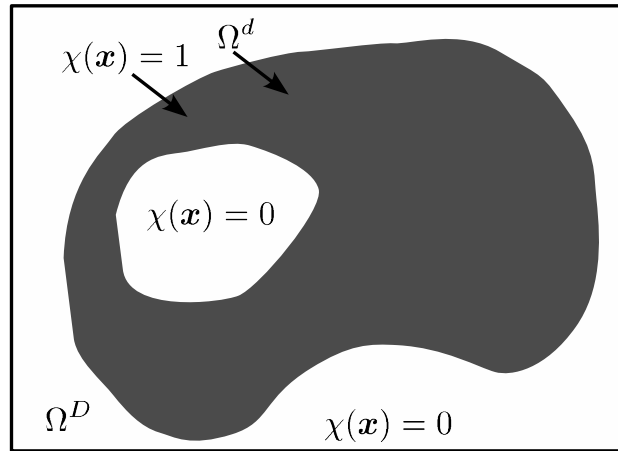
一般に構造最適化は、寸法最適化、形状最適化およびトポロジー最適化の三種に大別される．図 4.1 に示す一端を固定された片持ち梁の平均コンプライアンス最小化の問題にそれぞれの最適化手法を適用したときの結果を、図 4.2 から 4.4 に模式的に示す．

寸法最適化は、板厚最適化や梁の断面寸法最適化に代表されるように、形状やトポロジーは固定した状態で、構造物の寸法特性を最適化することを目的としている．形状最適化は構造物の外形状そのものを最適化する方法である．滑らかで具体的な外形状が得られるが、最適化の計算過程でトポロジーが変化することはない．すなわち、新たな部材を生成したり、構造物内部に新たな穴を創ることはできない．

一方で、トポロジー最適化は、固定設計領域を定めその領域内で最適な材料配置を求める手法である．あらかじめ設計対象となる固定設計領域を定める必要はあるが、その領域内で最適な形態を求めることができる．そのため、構造物の性能を抜本的に改善したり、従来にはなかった革新的な形態を創出できる可能性がある．ただし、構造物の形状表現は、数値的に解くために用いる固定設計領域の離散化要素に依存するため、滑らかさはないことに注意する必要がある．

4.2 トポロジー最適化

トポロジー最適化の基本的な考え方は、図 4.5 に示すように、固定設計領域 Ω^D の設定と領域内の位置 \mathbf{x} の関数である特性関数 $\chi(\mathbf{x})$ の導入にある．すなわち、最適構造となるべき領域 Ω^d を包含する固定設計領域 Ω^D を設け、次式に示す特性関数 $\chi(\mathbf{x})$ を用いて、構造最適化問題を材料分布の最適化問題

Fig. 4.5 Characteristic function χ related to material distribution.

として解く.

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Omega^d) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \Omega^D \setminus \Omega^d) \end{cases} \quad (4.1)$$

これは、材料の必要な箇所では $\chi(\mathbf{x}) = 1$, 材料の不要な箇所では $\chi(\mathbf{x}) = 0$ とすることにより最適な材料分布を表すことを意味している. しかし、この表現を用いた場合、 $\chi(\mathbf{x})$ が領域 Ω^d 内のいたるところで不連続になる状況を許容することになる. この問題を解決するため、特性関数 $\chi(\mathbf{x})$ を大域的観点から、連続関数 $\mu(\mathbf{x})$ ($0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq 1$) に置き換える設計空間の緩和を行う方法として、以下に述べる均質化法 [5] あるいは密度法 [45] が用いられる.

4.2.1 均質化法

均質化法にもとづく設計空間の緩和手法では、通常の弾性体材料に代えて、材料中に微小な空孔を含む仮想的な微視構造を導入する. 代表的な微視構造としては、図 4.6 に示すような、弾性体材料中に任意の角度を持つ長方形の空孔を設けたものや、図 4.7 に示すような、微小な幅を持つ弾性体材料を特定の方向に並べて積層したものがある. 微視構造中の空孔の寸法や材料の幅など、幾何学的な寸法を変化させることで、緩和された連続的な材料分布を表すことができる. このような微視構造の巨視的な特性を算出するときに均質化法を用いる. 均質化法は、介在物を含む非均質材料を均質化したときの材料特性を導く手法の総称であることを注記しておく. なお、正規化された設計変数としては、微視構造中で材料の占める割合をとることができる. このような連続な設計変数による最適化問題を解くことで、最適な材料配置すなわちトポロジーを見出すことができる. ただし、設計変数の値が 0 から 1 の間の中間的な値となるいわゆる「グレースケール」の領域は複合材料をもってすれば実現可能であるが、通常の弾性体材料では実現不可能である. したがって、最適化計算の収束時には全ての点において設計変数は 0 または 1 となる必要がある.

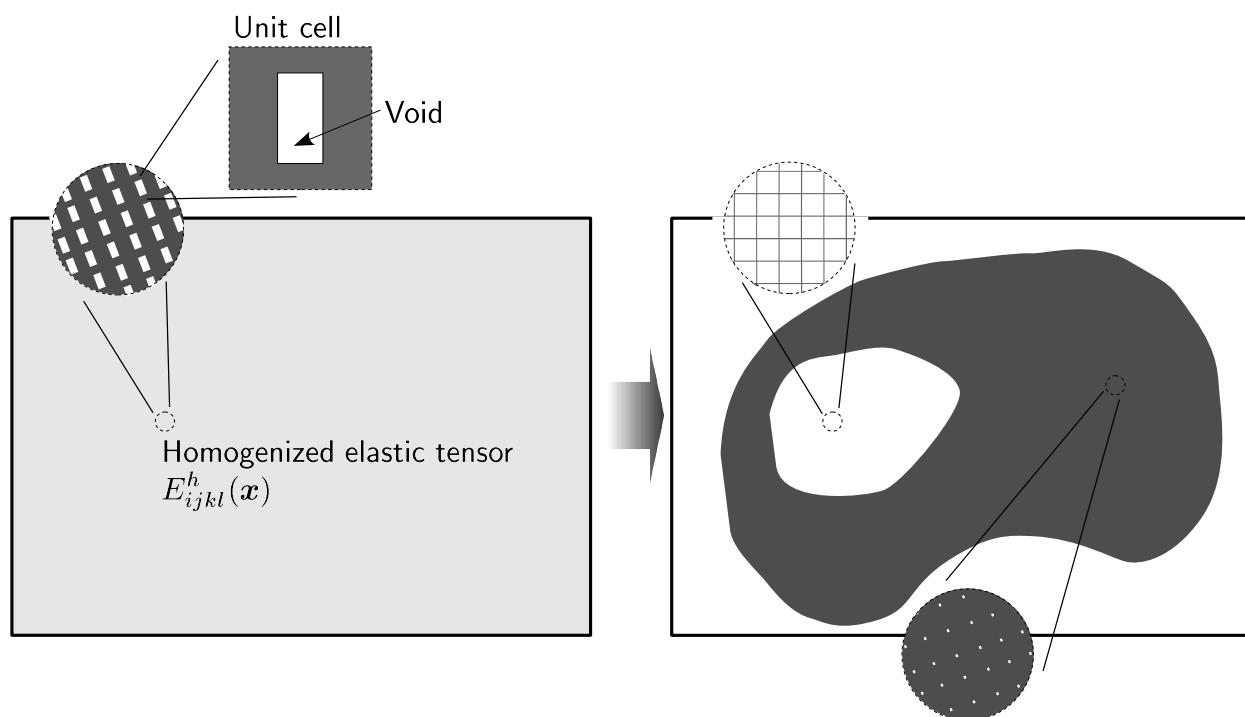


Fig. 4.6 Topology optimization based on homogenization approach.

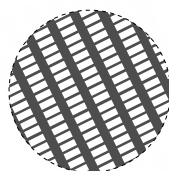


Fig. 4.7 Layered microstructure.

このように均質化法は、明確な数学的根拠に基づいて設計空間の緩和を行うことができるものの、対象とする力学方程式が複雑な場合には、大域的観点から求める連続関数の値、すなわち均質化された材料特性を容易に求めることができないという欠点をもつ。

4.2.2 密度法

密度法による設計空間の緩和手法では、微小な空孔を含む仮想的な微視構造を導入する代わりに、仮想的な特性を持った材料を導入する。すなわち図 4.8 に示すように物理現象を代表する弾性テンソルなどの材料特性をある連続関数で表し、連続的な材料分布を表現する。連続関数には 0 から 1 の間の値をとる密度関数 $f(\mu)$ が通常用いられ、設計変数である正規化された密度 $\mu(\mathbf{x})$ の関数として表現され

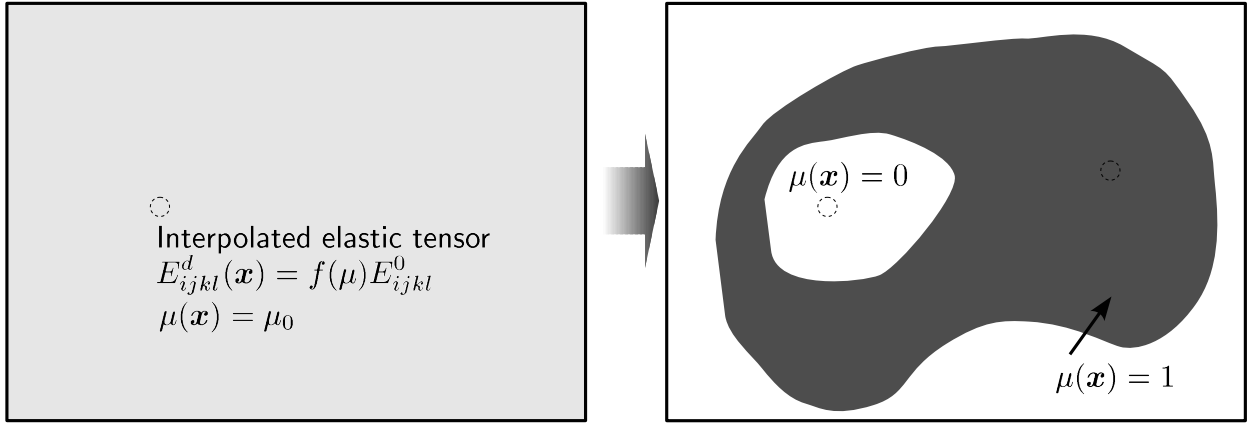


Fig. 4.8 Topology optimization based on density method.

ることが一般的である．ただし，密度関数の選び方により設計変数の中間値における材料特性は異なってくる．

密度法によるアプローチのうち，弾性体の問題で広く使われている方法が SIMP 法（Solid Isotropic Material with Penalization）[45] [46] [47] である． $E_{ijkl}^0(\mathbf{x})$ を弾性体材料の弾性テンソルとすると，SIMP 法では正規化された密度 $\mu(\mathbf{x})$ に対応する弾性テンソル $E_{ijkl}^d(\mathbf{x})$ を，次式のように $\mu(\mathbf{x})$ のべき乗からなる密度関数 $f(\mu) = \mu^p(\mathbf{x})$ により表現する．

$$E_{ijkl}^d(\mathbf{x}) = \mu^p(\mathbf{x}) E_{ijkl}^0, \quad p > 1 \quad (4.2)$$

ここで，べき乗の指数 p は一般的にペナルティ係数と呼ばれる．また，有効体積は正規化された密度 $\mu(\mathbf{x})$ に比例するとし，固定設計領域 Ω^D における材料の体積 V を次式で表す．

$$V = \int_{\Omega^D} \mu(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.3)$$

したがって，密度関数の値が 0 の場合は $E_{ijkl}^d(\mathbf{x}) = 0$ となり材料は配置されず，1 の場合には $E_{ijkl}^d(\mathbf{x}) = E_{ijkl}^0$ となり材料が配置されていることとなる．密度法を適用した場合でも，設計変数の値が 0 から 1 の間の中間的な値となるいわゆる「グレースケール」の領域は，構造物としての実現可能性は必ずしも保証されない．したがって，最適化計算の収束時には全ての点において設計変数の値は 0 または 1 となる必要がある．

他には $\mu \rightarrow 0$ における密度関数の傾きを有限な値になるようにした RAMP 法（Rational Approximations of Material Properties）[48] があり，動的な問題において有効とされている [23] [49] ．

このように密度法は，均質化法に比べて数学的根拠には欠けるものの容易に定式化を行うことができるため，弾性体材料の構造最適化問題だけでなく，熱伝導 [50] [51]，電磁波 [10] など様々な物理現象におけるトポロジー最適化問題で応用されている．

4.3 トポロジー最適化と板厚分布最適化

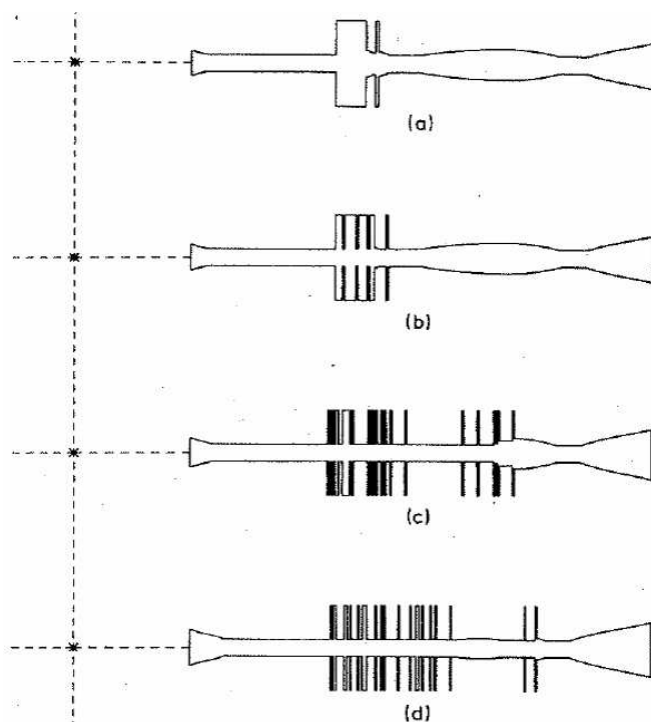


Fig. 4.9 Optimal reinforced circular plate [1]. (a) 150 elements, (b) 200 elements, (c) 250 elements, (d) 300 elements were used.

1981年にChengとOlhoff [1]は、Kirchhoff板としてモデル化した円板について、静的な剛性を最大にする最適な板厚分布を求めた。それは、図4.9に示すように少なくとも部分的な領域に、無限に薄い補強リブを無限に多く設けた円板であった。この結果は、最適化問題として数値的な解が存在するためには、設計空間を緩和する必要があることを意味している。このことは、トポロジー最適化問題において0と1が繰り返される不連続な特性を許容した特性関数を、連続関数に緩和して解くことに類似している。この事実に基づき、1988年にBendosoeとKikuchi [5]によりトポロジー最適化が提案されて以来、トポロジー最適化における設計空間の緩和手法を用いた薄板構造物の板厚分布最適化手法が提案されている。

均質化法的なアプローチでは、弾性体材料を中心材としてその表裏に無限小幅を持つリブを特定の方角に並べた補強リブ構造、逆に微小幅を持つ弾性体材料を並べてその表裏を弾性体材料ではさんだハニカム構造、あるいは単純に微小幅を持つ弾性体材料を並べた穴あき板構造が、微視構造としておもに使われている。KohnとVogelius [52]はKirchhoff板をベースに、SotoとDíaz [53]はMidlin-Reisner板をベースにそれぞれの微視構造に対する巨視的な弾性テンソル E_{ijkl}^h を求め、板に対して最適な補強

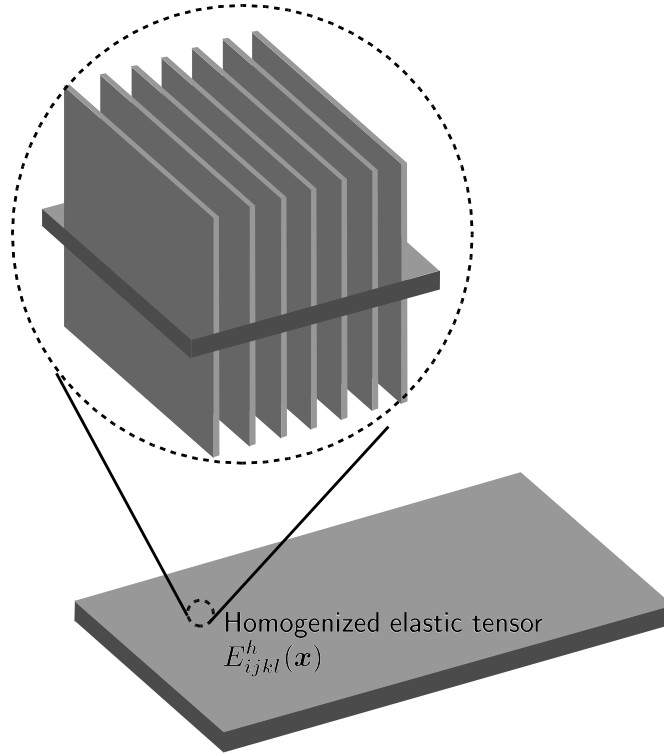


Fig. 4.10 Relaxation by microscopically ribbed plate.

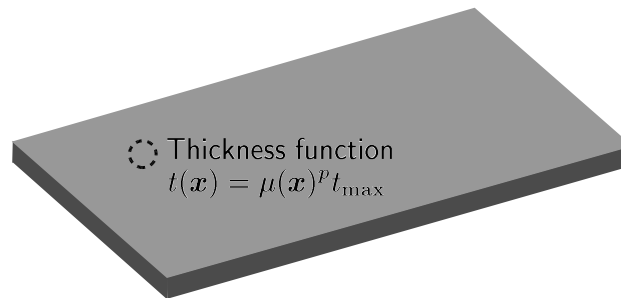


Fig. 4.11 Relaxation by variable thickness sheet.

材料の配置を求めている．しかし，無限小幅の補強リブがあるような微視構造を仮定しているため，最適化により得られた結果を具体的な形状として実現することは難しいことに注意する．

一方，密度法的なアプローチでは，板厚 t を設計変数である正規化された密度 $\mu(\mathbf{x})$ で表し，次式のように設計空間を緩和する方法が提案されている．

$$t(\mathbf{x}) = \mu^p(\mathbf{x}) t_{\max} \quad (4.4)$$

$$V = \int_{\Omega^D} \mu(\boldsymbol{x}) t_{\max} d\Omega \quad (4.5)$$

ここで、 t_{\max} は設定する最大板厚、 V は板の体積である．この場合、 $p > 1$ では設計変数の中間的な値に対してペナルティを与えることになり、トポロジー最適化の考え方にもとづけば、最適な穴の配置を求める問題となる [54]．また、 $p = 1$ なら設計変数の中間的な値に対してもペナルティは与えられず、中間の板厚も等しく許容されるため板厚分布の最適化問題となる．

第 5 章

多孔質材料の板厚分布最適化

本章では、板厚分布最適化とトポロジー最適化の類似性に着目し、トポロジー最適化における密度法の考え方に基づき、多孔質体材料の板厚分布を最適化する手法を提案する。ここでは第 3 章で提案した伝達マトリックスによる吸遮音構造物のモデル化を適用し、最適化計算における反復計算の負荷の低減を図る。以下では、まず最適化問題としての定式化を行った後、簡単な数値例により提案手法の有効性を検証する。

5.1 定式化

5.1.1 吸遮音材料の板厚分布について

ここでは、自動車で使用されている吸遮音構造物に代表される、多孔質体を含む平面状で積層型の吸遮音構造物を対象とする。吸音材料として吸遮音構造の一つに使われる多孔質体は、通常は区分的に一定の板厚分布をしており、板厚は不連続に変化していることが多い。しかし、近年では成形技術の発展により、繊維材料、ポリウレタンフォーム材料のどちらを用いた場合でも樹脂型を用いて製造し、連続的な多孔質体層の板厚分布を実現できるようになってきている。厚さは薄い箇所数 mm 程度、厚い箇所では 30 mm から 40 mm 程度である。また、遮音材料として吸遮音構造の一つに使われる弾性体表皮は、一般的に厚さはせいぜい 5 mm 程度である。そのため、厚さを連続的に変化させて製造することは難しく、板厚は通常一定である。さらに、自動車によっては床面をフラットにするために、嵩上げ材と呼ばれる比較的硬質の多孔質材料を用いる場合もある。厚さは様々な要件に依存するが厚い場合は 100 mm 程度になることもある。こうした吸遮音構造物は、空間内の静粛性を向上させるために通常、構造と音場の連成面に配置されていることが多い。

本章ではこうした積層型の吸遮音構造物について、各層の板厚分布の最適化手法を提案する。多孔質体層と弾性体表皮層の二層からなる吸遮音構造物を対象とし、多孔質体層の板厚分布を設計変数にとる。しかし、任意の層数で構成される吸遮音構造物にも全く同様に適用可能であることを注記しておく。

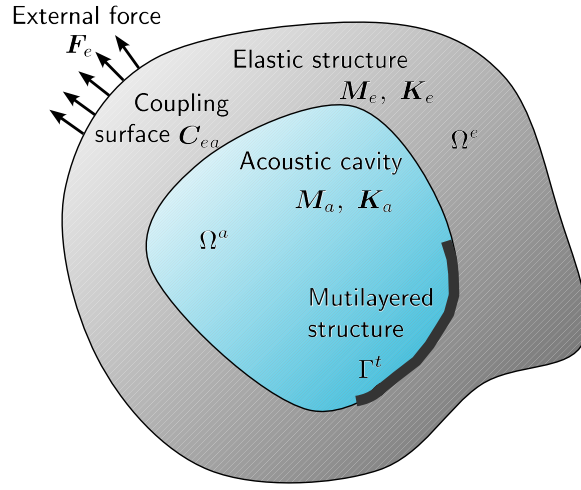


Fig. 5.1 Objective coupled system.

5.1.2 最適化問題の定式化

第3章で用いた系と同様に，図5.1に示すように，弾性体からなる構造 Ω^e ，音場 Ω^a および構造・音場の連成面の一部の境界面 Γ^t に存在する吸遮音構造物で構成される系を対象とする．この系について，音場の静粛性と吸遮音構造物の質量を同時に考慮できる吸遮音構造物の一設計手法として，吸遮音構造物の体積を指定上限値以下で対象周波数帯の音圧レベルを低減する問題を考える．音圧レベルは音圧の二乗に関係することから，吸遮音構造物の体積制約条件のもと，音場 Ω^a 内の部分領域 Ω^e において対象周波数帯 $f_1 \leq f \leq f_2$ の平均二乗音圧を最小化する最適化問題として定式化する．

第3章で示したように，厚さと比較して平面的な寸法が大きい積層型の吸遮音構造物の場合には，厚さ方向の伝達が支配的であると仮定し，吸遮音構造物は伝達マトリックス法により近似的にモデル化できる．ここでは，弾性体表皮層の厚さは一定とし，設計変数には多孔質体層の厚さをとる．これまでに多孔質体の板厚分布最適化に関する報告はなされていないが，多孔質体が二相材料で，弾性体としての特性もあわせ持っていることを考えると，多孔質体の最適な板厚分布に関しても，弾性体の薄板構造物の最適な板厚分布と同様 [1]，設計領域内のいたるところで板厚分布が不連続になる可能性がある．したがって，弾性体薄板構造物の板厚分布最適化問題と同様に，設計空間を緩和する必要がある．ここでは，トポロジー最適化における設計空間の緩和手法の一つである密度法の考え方のもと，多孔質体層の厚さ t ($0 \leq t \leq t_{\max}$) および体積 V を，正規化された連続な設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ ($0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq 1$) を用いて以下の式のように表す．

$$t = \mu^p(\mathbf{x})t_{\max} \quad (5.1)$$

$$V = \int_{\Gamma^t} \mu(\mathbf{x})t_{\max}d\Gamma \quad (5.2)$$

ここで、 \mathbf{x} は領域内の位置を示すベクトル、 t_{\max} は多孔質体層厚さの設計上限値である。また、 p はペナルティ係数で、 $p = 1$ の場合はペナルティを考慮した厚さと物理的な厚さが一致する。一方、 $p > 1$ の場合、設計変数の中間値 $0 < \mu(\mathbf{x}) < 1$ に対し、ペナルティを付加された厚さは物理的な厚さよりも小さくなり、厚さ分布をより強調した結果となる。すなわち、トポロジー最適化において「グレースケール」の領域を減少させる効果と同様に、多孔質体層が必要であれば厚さの最大値により近い値を取り、不要であればよりゼロに近い値をとるようになる。上式では、トポロジー最適化の基本的な考え方から、多孔質体層の不要な箇所は、設計変数をゼロにすることにより設計領域より除去可能であることを注記しておく。

さて、音場のポテンシャル関数 ϕ^a を音圧 p^a を用いて $p^a = -j\omega\phi^a$ で定義すると、目的関数 F は次式で表すことができる。

$$F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\int_{\Omega^c} \omega^2 \phi^a \phi^{a*} d\Omega \right) d\omega \quad (5.3)$$

ここで、 $\omega_1 = 2\pi f_1$ 、 $\omega_2 = 2\pi f_2$ である。式 (5.3) の右辺 () 内を目的関数のスペクトル F_ω とおき、多孔質体の体積制約の上限値を V_0 とすると、最適化問題は次式で定式化できる。

$$\underset{\mu(\mathbf{x})}{\text{Minimize}} F(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\omega d\omega \quad (5.4)$$

$$\text{Subject to } V - V_0 \leq 0 \quad (5.5)$$

$$\text{equilibrium equation} \quad (5.6)$$

$$0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (5.7)$$

5.1.3 連続的な板厚分布を仮定した設計空間の離散化

最適化問題を数値的に解く場合は、連続的な設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ を離散化近似する。その際、設計対象が満たすべき平衡方程式を有限要素法により解くために設けた離散化要素を併用するのが通常である。また、離散化された設計変数を離散化近似における要素に設定する場合には、設計変数の値は各要素内で一定値をとるとされることが多い。しかし、この場合、設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ の連続的な分布を表現するためには十分詳細な要素分割が必要となる。この要素分割をもって有限要素法により平衡方程式を解こうとすると、現実的な計算資源には収まらないことが推測される。さらに、設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ を固定設計領域 Ω^D の離散化近似における各要素ごとに定義すると、「チェッカーボード」など数値的に不安定な現象が生じることが知られている [55]。

ここではこの問題を解決するため、Matsui と Terada [56]、あるいは Rahmatalla と Swan [57] が提案した連続的な材料分布を仮定した設計空間の離散化手法を適用する。この手法では、設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ を C^0 以上の連続関数であると仮定し、設計変数を離散化要素の各節点に割り当て、内挿関数 N_i ($i = 1, 2, \dots, n_d$) を構成要素とする関数ベクトル \mathbf{N} を用いて、次式のように離散化する。

$$\mu(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{n_d} N_{tj} \mu_j \quad (5.8)$$

ここで、 $\boldsymbol{\mu}$ は節点における設計変数を並べたベクトルで μ_j ($j = 1, \dots, n_d$) はその構成要素、 n_d は設計変数の数を表す。なお、内挿関数としては、本論文で使用している四辺形要素の場合、 C^0 連続で最も簡単な双一次関数を用いるものとする。

目的関数のスペクトル F_ω は、音場に対する内挿関数ベクトル \mathbf{N}_a を用いて離散化すると次式となる。

$$F_\omega = \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\Omega_i^c} \omega^2 \boldsymbol{\Phi}_a^T \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_a \boldsymbol{\Phi}_a^* d\Omega \quad (5.9)$$

また、多孔質体層の体積 V の離散化表現は次式となる。

$$V = \sum_{i=1}^{n_t} \int_{\Gamma_i^t} \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu}_{t_{\max}} d\Gamma \quad (5.10)$$

ここで、 n_c 、 n_t はそれぞれ Ω^c 、 Γ^t における離散要素の数である。以上から、離散化された最適化問題は次式のように定式化できる。

$$\underset{\mu_j}{\text{Minimize}} F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\omega d\omega \quad (5.11)$$

$$\text{Subject to } V - V_0 \leq 0 \quad (5.12)$$

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Phi}_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (5.13)$$

$$0 < \mu_{\min} \leq \mu_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n_d) \quad (5.14)$$

なお、系の平衡方程式は式 (3.112) で表されることから、対象とする系の動剛性マトリックス \mathbf{D} は次のようになる。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_a \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} - j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

また、 μ_{\min} は数値的な不安定性を回避するために設けた設計変数 μ_j の下限値である。

5.1.4 最適化アルゴリズム

前節で定式化を行った最適化問題を解くためアルゴリズムを説明する。最適化のステップ l において、まず設計変数 μ_j の値から、固定設計領域内における多孔質体層の質量 V および吸遮音構造物の伝達マトリックスを計算する。次に、平衡方程式を解き、続けて目的関数 F を算出する。そして、目的関数に対して収束判定を行い収束していれば終了となる。収束していなければ、目的関数 F と制約条件である多孔質体層の体積 V の設計変数 μ_j に関する設計感度を計算する。最後に、MMA (Method of Moving Asymptotes) [58] により設計変数を更新し、ステップ $l \rightarrow l+1$ として繰返し計算を行う。

5.1.5 感度解析

MMA により設計変数の更新を行う際には、目的関数の設計感度が必要となる。ここでは、設計変数の数が多い場合でも効率良く感度を求めることができる随伴変数法に基づき感度を計算する方法について

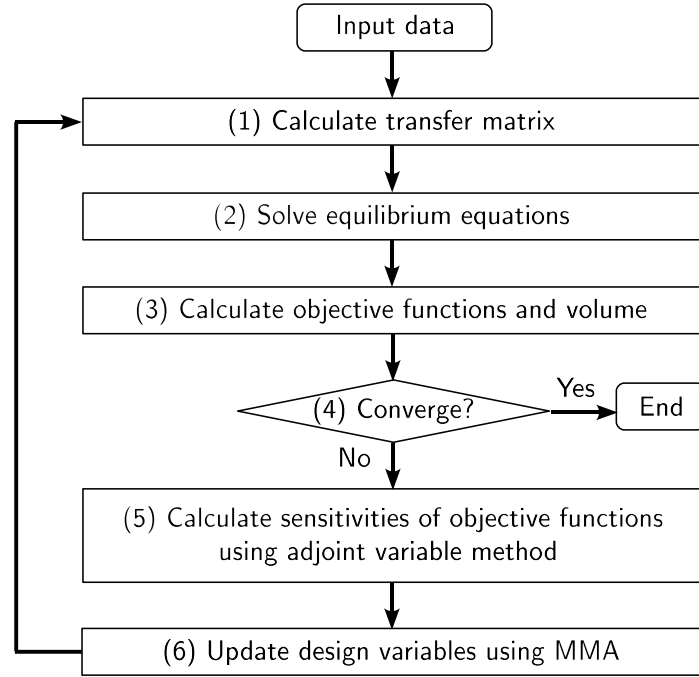


Fig. 5.2 Flowchart of the optimization procedure.

て述べる．今，構造の変位ベクトル，音場のポテンシャルベクトルそれぞれの随伴変数ベクトルを \mathbf{V}_e および $\boldsymbol{\Psi}_a$ とする．平衡方程式が満たされていることに注意すると，目的関数のスペクトル F_ω について，次式が成り立つ．

$$F_\omega = F_\omega + [\mathbf{V}_e^T \quad \boldsymbol{\Psi}_a^T] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} - \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Phi}_a \end{bmatrix} \right\} + [\mathbf{V}_e^{*T} \quad \boldsymbol{\Psi}_a^{*T}] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e^* \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} - \mathbf{D}^* \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e^* \\ \boldsymbol{\Phi}_a^* \end{bmatrix} \right\} \quad (5.16)$$

構造に付与される入力 \mathbf{F}_e が設計変数に依らず一定とすると， $\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial \mu_j} = \frac{\partial \mathbf{F}_e^*}{\partial \mu_j} = \mathbf{O}$ であることから，目的関数のスペクトル F_ω の設計変数 μ_j に対する感度は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{dF_\omega}{d\mu_j} = & -[\mathbf{V}_e^T \quad \boldsymbol{\Psi}_a^T] \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu_j} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Phi}_a \end{bmatrix} - [\mathbf{V}_e^{*T} \quad \boldsymbol{\Psi}_a^{*T}] \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \mu_j} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e^* \\ \boldsymbol{\Phi}_a^* \end{bmatrix} \\ & + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \frac{\partial F_\omega}{\partial \boldsymbol{\Phi}_a} \end{bmatrix} - [\mathbf{V}_e^T \quad \boldsymbol{\Phi}_a^T] \mathbf{D} \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial \mu_j} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_a}{\partial \mu_j} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \frac{\partial F_\omega}{\partial \boldsymbol{\Phi}_a^*} \end{bmatrix} - [\mathbf{V}_e^{*T} \quad \boldsymbol{\Psi}_a^{*T}] \mathbf{D}^* \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_e^*}{\partial \mu_j} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_a^*}{\partial \mu_j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

したがって随伴方程式

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \boldsymbol{\Psi}_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \frac{\partial F_\omega}{\partial \boldsymbol{\Phi}_a} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (5.18)$$

を満たす \mathbf{V}_e , Ψ_a を用いると, 目的関数 F の設計変数 μ_j に対する感度は次式で求めることができる.

$$\frac{dF}{d\mu_j} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dF_\omega}{d\mu_j} d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(- [\mathbf{V}_e^T \quad \Psi_a^T] \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu_j} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \Phi_a \end{bmatrix} - [\mathbf{V}_e^{*T} \quad \Psi_a^{*T}] \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \mu_j} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_e^* \\ \Phi_a^* \end{bmatrix} \right) d\omega \quad (5.19)$$

吸遮音構造物以外の領域すなわち構造 Ω^e や音場 Ω^a の剛性マトリックス・質量マトリックスの設計変数 μ_j に対する感度は小さく無視できるものとする, 動剛性マトリックス \mathbf{D} の設計変数 μ_j に対する感度は, 以下のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu_j} \simeq -j\omega p \mu_j^{p-1} t_{\max} \frac{\partial}{\partial t_j} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

ここで, $t_j = \mu_j^p t_{\max}$ である. また, 伝達マトリックスの要素 t_{11} , t_{12} , t_{21} の板厚 t_j による微分を t'_{11} , t'_{12} , t'_{21} とすると, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 の板厚 t_j による偏微分は次式となる.

$$\frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{\Gamma^{t_k}} \frac{-t'_{11}}{t_{11}^2} \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}_e \mathbf{N}_a d\Gamma \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{\Gamma^{t_k}} \frac{t'_{21} t_{11} - t_{21} t'_{11}}{t_{11}^2} \mathbf{N}_e^T \mathbf{n}_e \mathbf{n}_e^T \mathbf{N}_e d\Gamma \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_3}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{\Gamma^{t_k}} -\frac{t'_{12} t_{11} - t_{12} t'_{11}}{t_{11}^2} \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_a d\Gamma \quad (5.23)$$

ただし, n_t は境界面 Γ^t における離散要素の数である.

5.2 数値例による提案手法の検証

5.2.1 対象の系

図 5.3 に示すように, 平板上に吸遮音構造物と音場を有する系を対象にする. 大きさ $0.365 \text{ m} \times 0.250 \text{ m}$, 厚さ 0.0012 m のスチール製平板を全周単純支持とし, 吸遮音構造物と音場を平板の上に組み合わせる. 音場は平板と同じ大きさで高さは 0.490 m とし, 吸遮音構造物との境界面以外は剛壁境界条件が成り立つとしている. なお, 平板の中央点に単位周期加振力を与える.

有限要素による離散化に際しては, 計算の自由度を小さくするため対称性を考慮して系の $1/4$ 部分のみを要素分割する. 要素分割数は x 方向に 36, y 方向に 26 である. 設計変数は平板と音場の連成面上に存在する節点数に等しく 999 個である.

吸遮音構造物は多孔質体層と弾性体表皮層からなる二層構造とし, 初期状態における多孔質体層の厚さは 0.030 m , 弾性体表皮層の厚さは 0.002 m とする. 図 5.4 に初期状態での多孔質体層の厚さ分布を表示しておく. なお, 使用する多孔質体と弾性体表皮は第 3 章で用いたものと同一で, ポリウレタンフォームとオレフィンシートである.

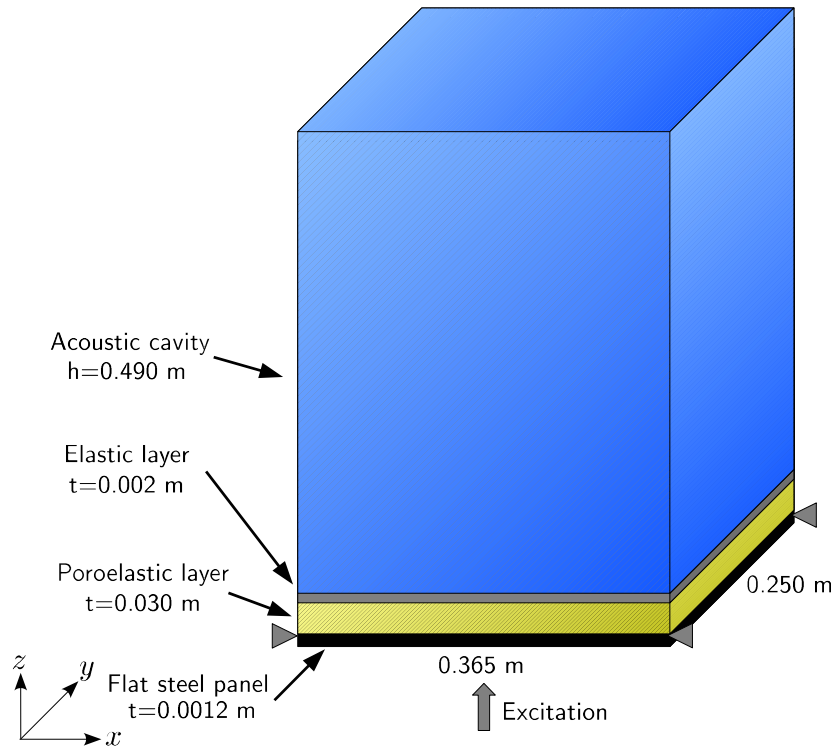


Fig. 5.3 Analyzed coupled system.

5.2.2 計算条件

音圧の評価領域 Ω^e は、ローカルミニマムな最適解に陥ることを避けるため、音場の全領域である Ω^a にとる。図 5.5 に初期状態の周波数応答を実線で示す。なお、点線は吸遮音構造物を除去した平板のみの場合の応答で比較のために示している。上側が平板中央の振動、下側が音場中央の音圧の応答である。また、初期状態における目的関数のスペクトル F_ω を図 5.6 に示す。実線が平板上に吸遮音構造物が存在する場合、点線が平板のみの場合である。図 5.5, 5.6 より、対象とする系には 500 Hz までに平板の共振によるピークが 3 つ、音場の共鳴によるピークが 1 つ存在していることが分かる。

音圧の応答レベルが高い周波数範囲を最適化の対象とし、音圧レベルを低減できる最適な多孔質体層の板厚分布を求める問題とする。ここでは、平板の一次共振によるピークを含む 45 Hz から 70 Hz（周波数範囲 1）と音場の一次共鳴によるピークを含む 340 Hz から 365 Hz（周波数範囲 2）を対象周波数範囲とする。単一の周波数を対象にした場合、ピーク周波数がシフトして対象の周波数から離れるだけで、広い周波数域で考えればピークレベルは低減していないという解になりがちである。多孔質体層の板厚変化でピーク周波数がシフトしても対象周波数範囲から外れないよう、対象周波数にある程度の範囲を与えている。

体積制約の上限値 V_0 は初期状態の多孔質体層における体積とする。多孔質体層の上限厚さ t_{\max} は

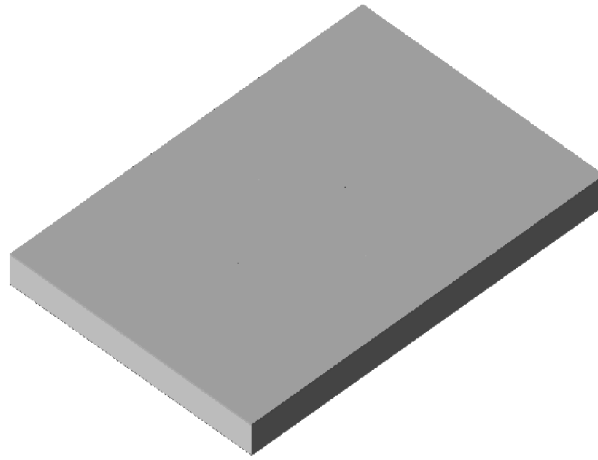


Fig. 5.4 Initial thickness distribution of poroelastic layer.

0.090 m とし，設計変数 μ_j は 0.333 を初期値とする．設計変数の下限値は数値計算上の特異性を回避するため $\mu_{\min} = 0.01$ とする．また，板厚分布としては中間の板厚も等しく許容されることから，ペナルティ係数 p はペナルティを付加された厚さと物理的な厚さが一致する $p = 1$ に設定する．

5.2.3 周波数範囲 1

まず対象周波数を $f_1 = 45$ Hz から $f_2 = 70$ Hz とした場合の最適化結果を示す．図 5.7 は最適化した多孔質体層の厚さ分布を示す．中央部は設計変数の上限値 ($\mu_j = 1.0$) になっている．また，縁部の厚さは非常に小さくなっており下限値に近い．図 5.8 は図 5.7 に示した最適な多孔質体層の厚さ分布を適用したときの周波数応答を示す．音圧に関してみると，考慮していない 200 Hz 以上の周波数範囲では初期状態の応答レベルより大きくなっているものの，最適化の対象としている 45 Hz から 70 Hz では初期状態の応答レベルより小さくできている．

図 5.9 は初期状態および最適化後の状態での平板の振動形状，図 5.10 はそれぞれの状態での弾性体表皮層の振動形状である．周波数はそれぞれの音圧応答レベルがピークとなる周波数とし，初期状態では 58 Hz，最適化後の状態では 51 Hz である．図中で色の濃い部分ほど振動振幅が大きいことを示している．なお，各図において振幅スケールは統一させている．図より平板は (1,1) モードを主として振動しており，弾性体表皮層も同様の振動形状であることが分かる．また，最適な厚さ分布の場合は，平板・弾性体表皮層ともに振動振幅が小さくなっている．図 5.11 は，さらに詳細に把握するために，短辺中央断面における振動形状を示している．周波数は同じく初期状態は 58 Hz，最適化後の状態では 51 Hz である．図中で上側が弾性体表皮層，下側が平板の振動を示している．なお，薄い点線が振動中心，点線が初期状態，実線が最適化後の状態のものである．初期状態，最適化後の状態を比較して，振動形状は同じであるが，最適化後の状態における平板の振動レベルは，初期状態におけるそれよりも小さく

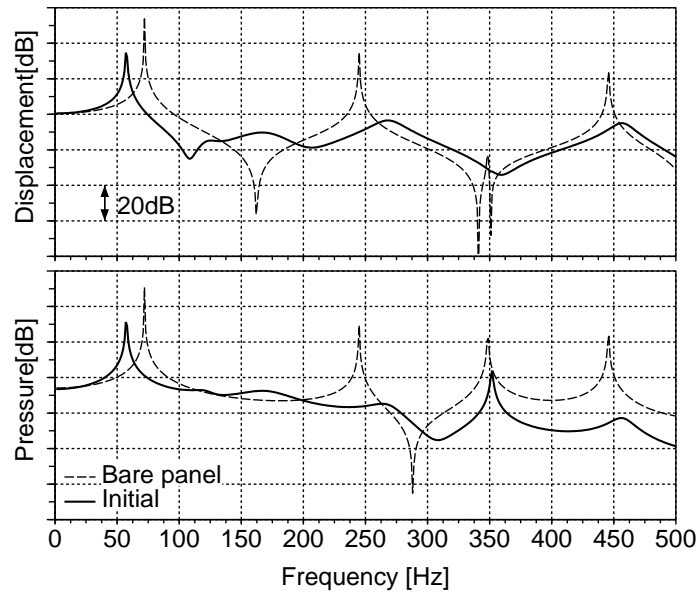


Fig. 5.5 Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower). Dashed line shows the response in the bare panel and solid line shows the response in the initial uniform thickness.

なっていることが分かる。その結果、音場への入力となる弾性体表皮層の体積速度和が減少し、音圧レベルが小さくなっている。平板は一次共振モードを主として振動していることから、振動振幅が大きい中央部において多孔質体層が厚くなったと考えられる。

5.2.4 周波数範囲 2

次に、対象周波数を $f_1 = 340$ Hz, $f_2 = 365$ Hz とした場合の最適化結果を示す。図 5.12 は最適化した多孔質体層の厚さ分布を示している。ほとんどの領域で初期状態よりも薄くなっていることが分かる。また、図 5.7 と比べると領域内において板厚変化の小さい分布 ($\mu_j = 0.25 \sim 0.32$) となっている。図 5.13 は最適な多孔質体層の厚さ分布を適用したときの周波数応答で、340 Hz から 365 Hz の応答を見ると、平板の振動レベルはほとんど変わらないが、音圧のピークレベルは小さくなっている。

図 5.14 は初期状態および最適化後の状態の平板の振動形状、図 5.15 はそれぞれの状態での弾性体表皮層の振動形状である。周波数はそれぞれの音圧応答レベルがピークとなる周波数とし、初期状態は 352 Hz、最適化後の状態では 346 Hz である。平板は (3,1) モードを主として振動しており、弾性体表皮層も同様の振動形状となっている。しかし、初期状態と最適化後の状態を比較して、弾性体表皮層の振幅レベルに大きな差は見られない。図 5.16 は、図 5.11 と同様に、短辺中央断面における振動形状を示している。これより、平板振動レベルはほぼ同じであるが、最適化後の状態では、弾性体表皮層による体積速度和が減少することで、音圧レベルが小さくなっていると考えられる。

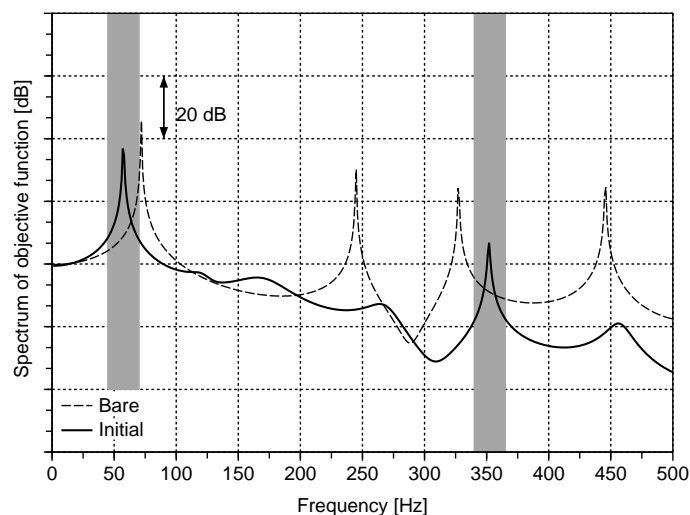


Fig. 5.6 Spectrum of objective function for the initial thickness (solid line) and reference spectrum when the multilayered structure is removed (dashed line). Target frequency ranges including a spectrum peak to be minimized are highlighted. The first covers from 45 Hz to 70 Hz; the second from 340 Hz to 365 Hz.

5.2.5 有限要素法による性能確認

伝達マトリックス法による吸遮音構造物の解析は近似解法であるため、得られた最適な板厚分布をもとに体積要素で実形状を表現し、有限要素法による計算結果と比較する。

図 5.17, 図 5.18 はそれぞれ、周波数範囲 1 および周波数範囲 2 における最適な板厚分布から有限要素法により周波数応答を求めた結果である。周波数範囲 1 の場合は、音圧レベルピークの低減量は伝達マトリックス法による計算結果に比べて、小さくなっているものの低減効果が見られる。また、対象周波数範囲外でも、伝達マトリックス法による計算結果と概ね一致しており、実用的に十分な精度で再現できていると考えられる。

一方で、周波数範囲 2 の場合は、板厚分布の最適化結果で得られたほどの低減効果は得られていない。この要因について調べるため、弾性体表皮層の振動形状を見てみる。なお、音場はこの周波数範囲内に上下方向の一次共鳴が存在し、励起されやすいことに注意する。図 5.19, 図 5.20 は、有限要素法で計算したときの平板および弾性体表皮層の振動形状で、それぞれ初期状態の様な板厚分布の場合と、最適な板厚分布の場合の結果である。図 5.14, 図 5.15 より、伝達マトリックス法では、面直方向の一次元的な波動伝播のみ考慮しているため、弾性体表皮層の波長は平板の波長と同一になっていることが分かる。この場合、体積変化が弾性体表皮層の表面全体において積分してキャンセルするような板厚分布になっていると考えられる。

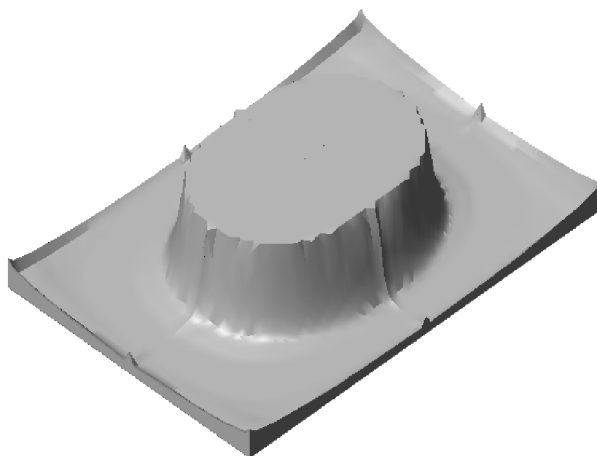


Fig. 5.7 Optimal thickness distribution for the optimization in the frequency range from 45 Hz to 70 Hz.

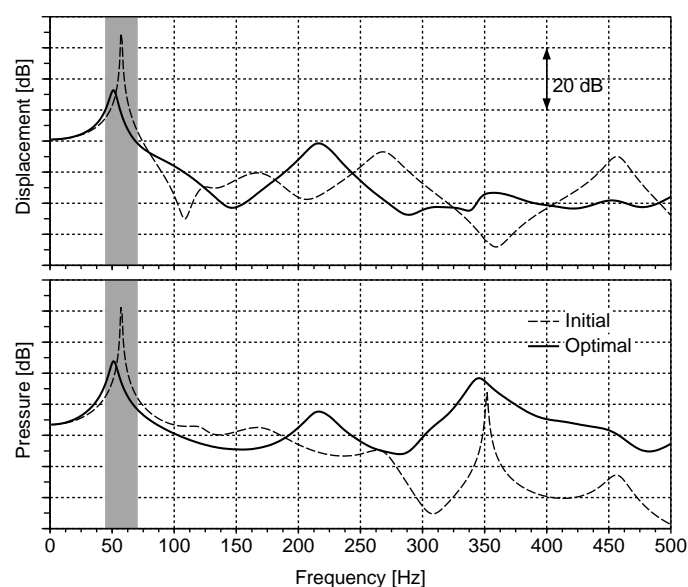


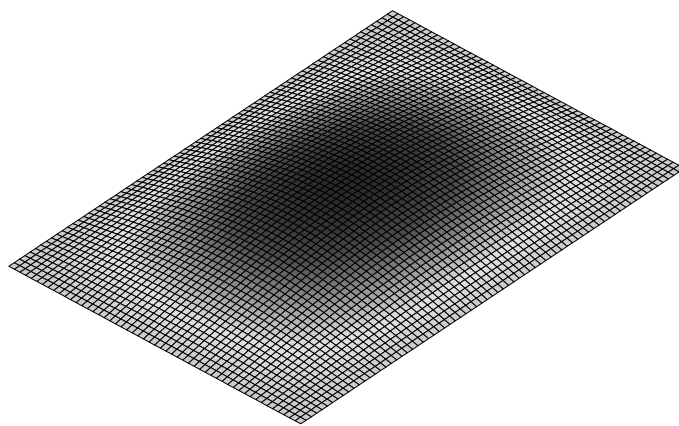
Fig. 5.8 Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower). Dashed line shows the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 45 Hz to 70 Hz.

有限要素法では弾性体表皮層の剛性も考慮しているため、平板の波長成分に加えて弾性体表皮層の短い波長成分が現れているのが分かる。弾性体表皮層の表面全体でみると、体積変化は完全には打ち消されず、その結果、音場の一次共鳴を励起し音圧レベルが大きくなっていると考えられる。しかし、その他の周波数帯域については、伝達マトリックス法の応答は、初期の一樣な厚さ分布および最適な板厚分布の場合、どちらにおいても有限要素法により得られた結果をほぼ再現している。

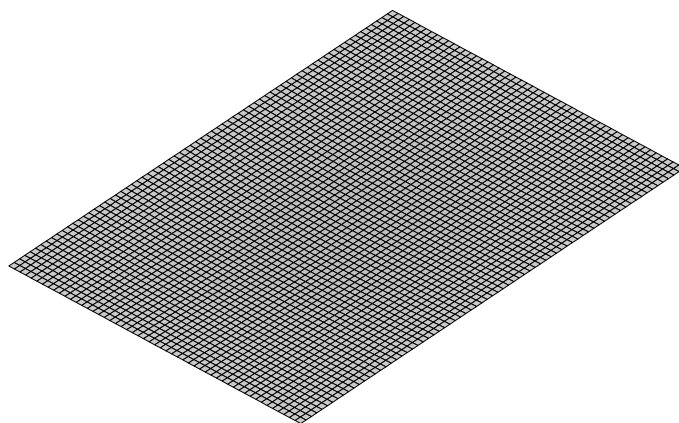
5.3 まとめ

本章では，弾性体からなる構造と音場の境界面に配置された吸遮音構造物について，最適な板厚分布を求める設計手法を提案するとともに，簡単な数値例によりその手法の有効性を検証した．得られた結果を以下に示す．

- (1) 構造と音場の境界面にある吸遮音構造物を伝達マトリックスで表し，連続的な板厚分布を仮定することで，音場の音圧レベルを最小とする最適な板厚分布を求める方法論を構築した．
- (2) 平板上に吸遮音構造物と音場を有する系に対して，構築した手法を適用した結果，対象周波数範囲において音場の音圧レベルを最小化する多孔質体層の板厚分布が得られた．
- (3) 得られた多孔質体層の厚さは，対象周波数範囲に含まれる構造の振動特性および音場の音響特性に応じた，物理的にも妥当な板厚分布をしており，手法の有効性を示すことができた．

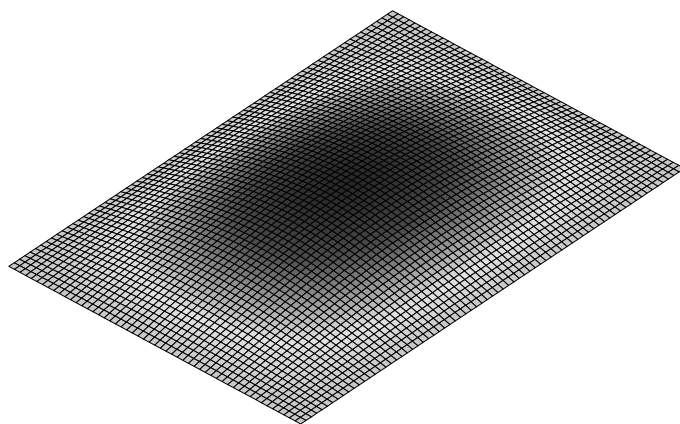


(a) Initial (58 Hz).

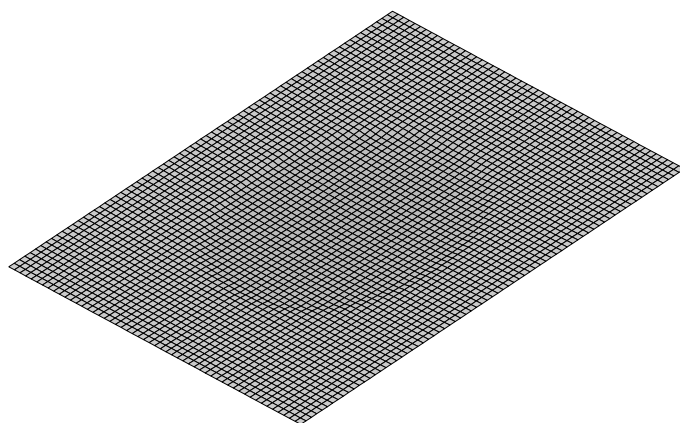


(b) Optimal (51 Hz).

Fig. 5.9 Deflection shapes of flat steel panel using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 58 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 51 Hz.



(a) Initial (58 Hz).



(b) Optimal (51 Hz).

Fig. 5.10 Deflection shapes of elastic cover layer using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 58 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 51 Hz.

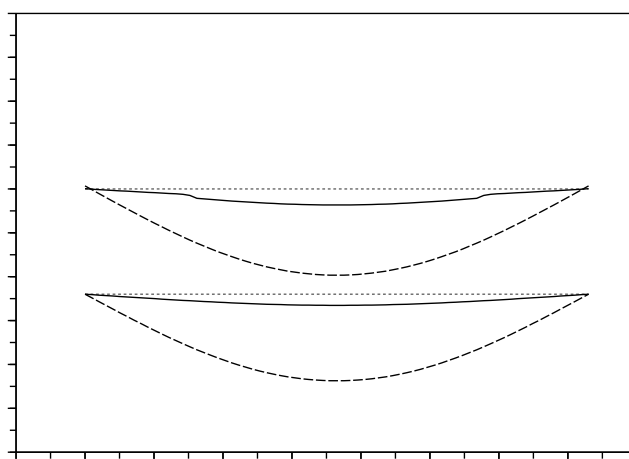


Fig. 5.11 Deflection shapes of flat steel panel and elastic layer at a section area: dashed line corresponds to the initial uniform thickness at 58 Hz and solid line to the optimal thickness distribution at 51 Hz.

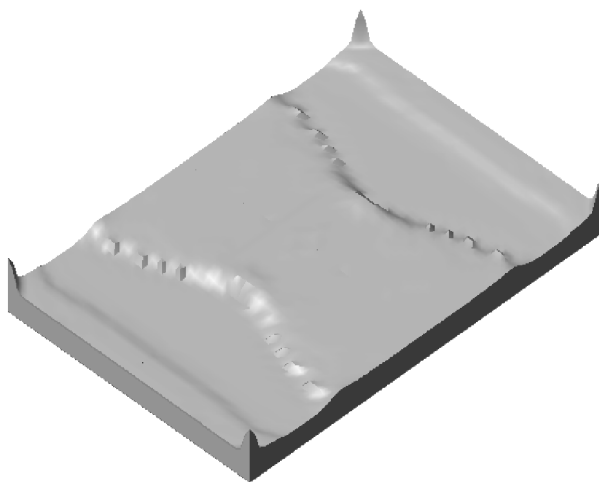


Fig. 5.12 Optimal thickness distribution for the optimization in the frequency range from 340 Hz to 365 Hz.

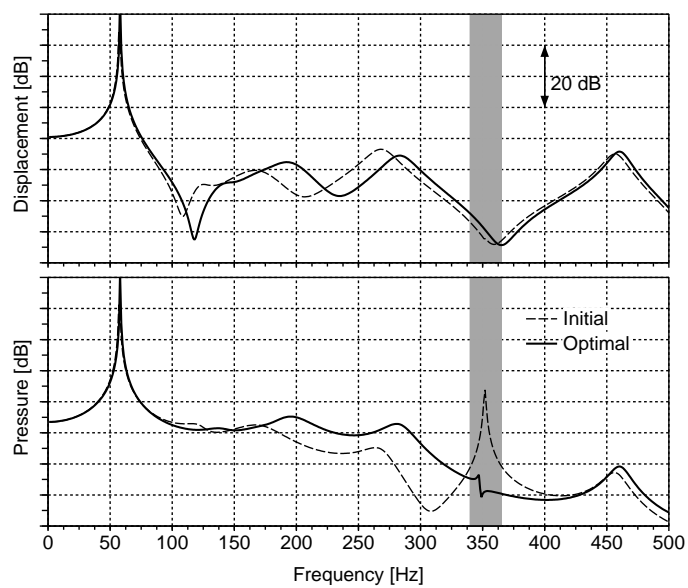
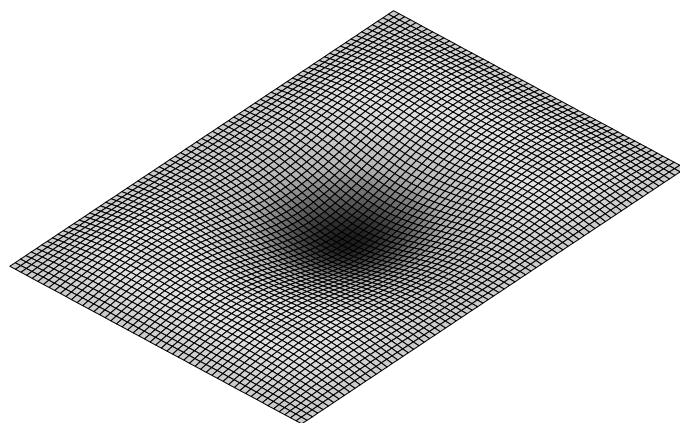
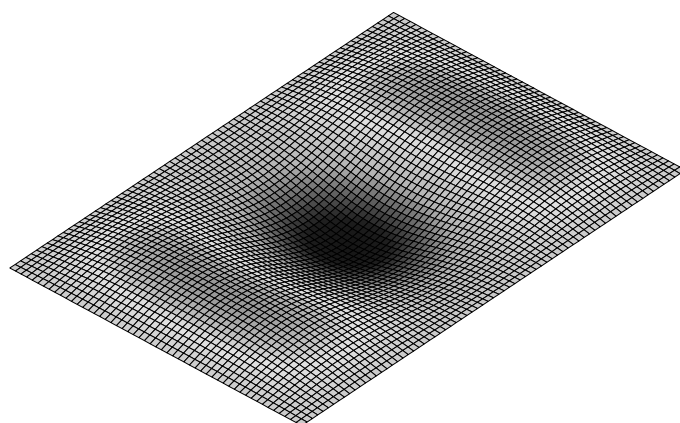


Fig. 5.13 Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower). Dashed line shows the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 340 Hz to 365 Hz.

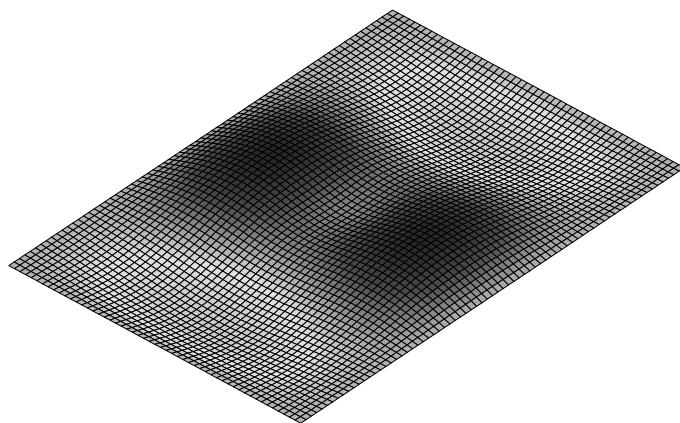


(a) Initial (352 Hz).

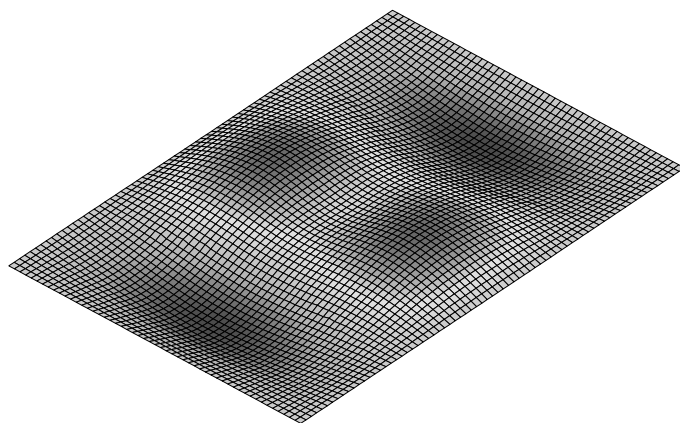


(b) Optimal (346 Hz).

Fig. 5.14 Deflection shapes of flat steel panel using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 346 Hz.



(a) Initial (352 Hz).



(b) Optimal (346 Hz).

Fig. 5.15 Deflection shapes of elastic cover layer using transfer matrix representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 346 Hz.

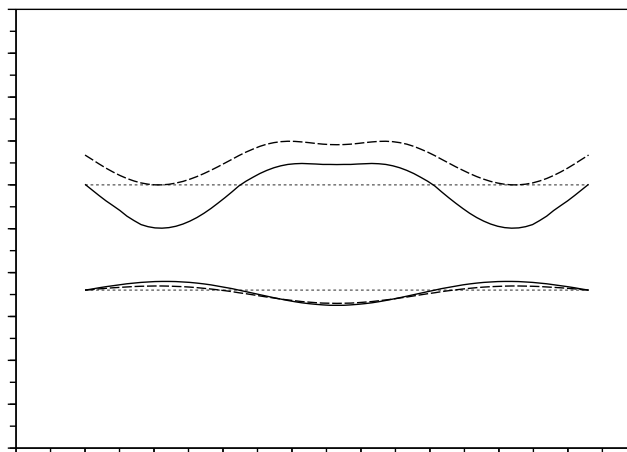


Fig. 5.16 Deflection shapes of flat steel panel and elastic layer at a section area: dashed line corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and solid line to the optimal thickness distribution at 346 Hz.

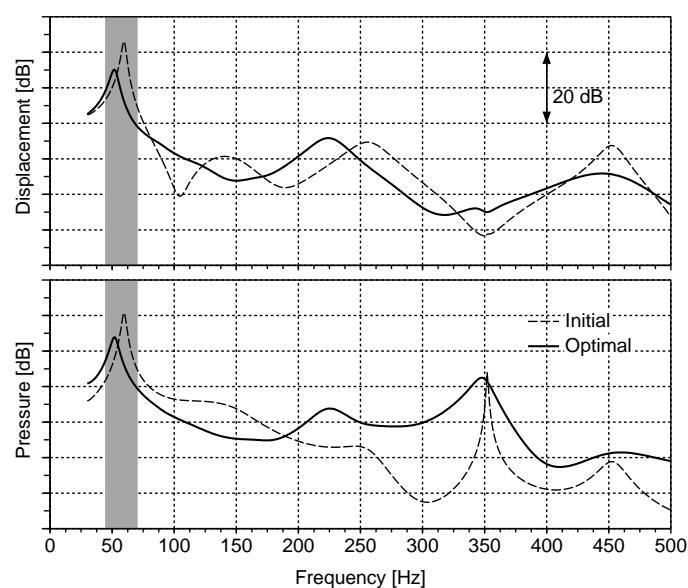


Fig. 5.17 Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower) obtained by finite element solution. Dashed line shows the the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 45 Hz to 70 Hz.

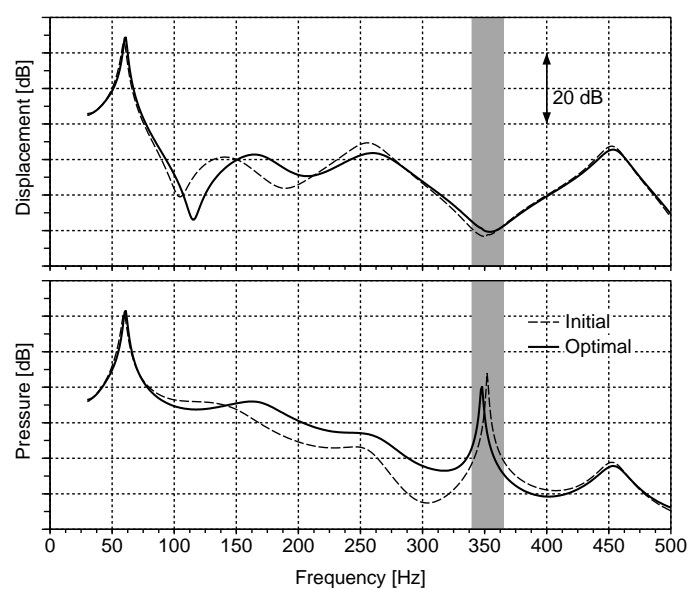
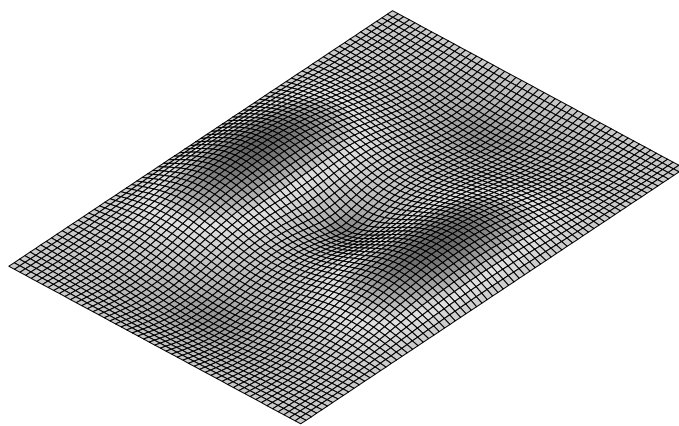
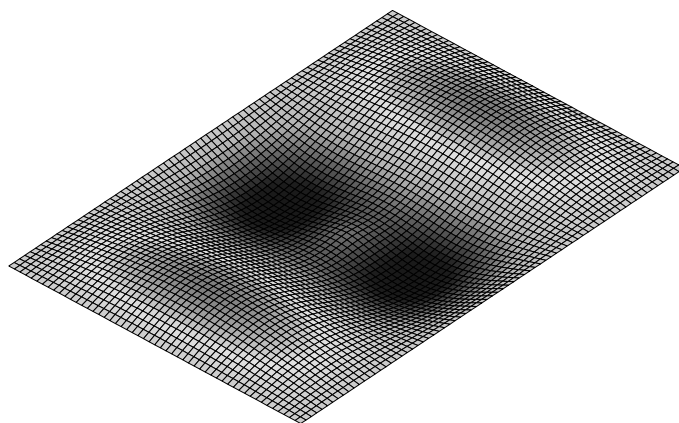


Fig. 5.18 Frequency response of displacement of the panel (upper) and pressure in the cavity (lower) obtained by finite element solution. Dashed line shows the response in the initial uniform thickness and solid line shows the response in the optimal thickness distribution for the frequency range of 340 Hz to 365 Hz.

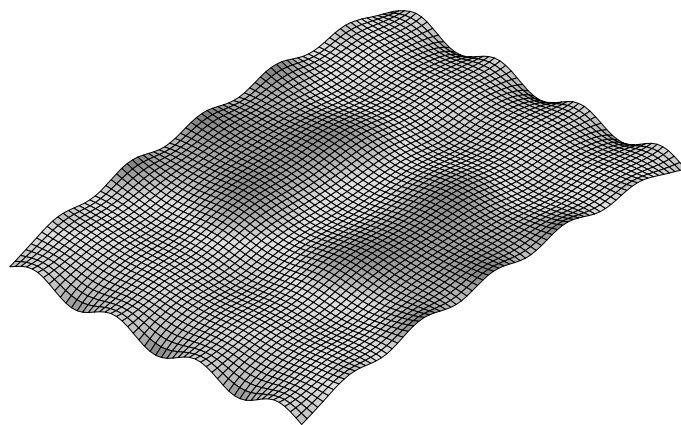


(a) Initial (352 Hz).

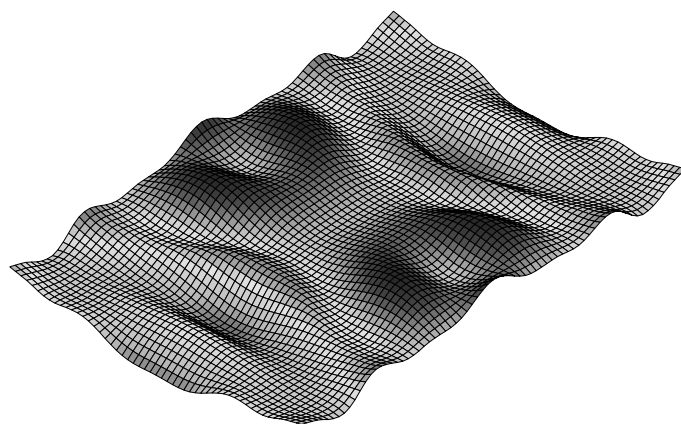


(b) Optimal (348 Hz).

Fig. 5.19 Deflection shapes of flat steel panel using finite element representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 348 Hz.



(a) Initial (352 Hz).



(b) Optimal (348 Hz).

Fig. 5.20 Deflection shapes of elastic cover layer using finite element representation: (a) corresponds to the initial uniform thickness at 352 Hz and (b) to the optimal thickness distribution at 348 Hz.

第 6 章

多孔質材料のトポロジー最適化

本章では，トポロジー最適化における密度法の考え方にに基づき，多孔質体を含む吸遮音構造物の最適なトポロジーを創生する手法を提案する．以下ではまず，最適化問題としての定式化を行ったのち，簡単な数値例により提案手法の有効性を検証する．

6.1 定式化

6.1.1 音圧応答レベルの低減を目的にしたトポロジー最適化

トポロジー最適化の基本的な考え方は，第 4 章においても述べたように，固定設計領域 Ω^D の設定と以下に示す特性関数 χ の導入にある．すなわち，最適構造となるべき領域 Ω^d を包含する固定設計領域 Ω^D を設け，次式で表される特性関数 χ を用いて構造最適化問題を材料の最適分布の問題として解く．

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Omega^d) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \Omega^D \setminus \Omega^d) \end{cases} \quad (6.1)$$

これは，材料の必要な箇所では $\chi(\mathbf{x}) = 1$ ，材料の不要な箇所では $\chi(\mathbf{x}) = 0$ とすることにより最適な材料分布を表すことを意味している．

従来までの，線形弾性体で構成される構造を対象としたトポロジー最適化の場合，図 6.1 に示すように，領域 $\Omega^D \setminus \Omega^d$ は弾性テンソルがゼロ，すなわちボイド状態を表している．しかし，数値計算上の特異性を回避するため，非常に小さな弾性テンソルを有する線形弾性体として表している．

一方，最適構造となるべき領域 Ω^d から放射される音を対象にする場合，領域 $\Omega^D \setminus \Omega^d$ は空気の特徴を有する必要がある．しかし，領域 Ω^d と異なる支配方程式を空気に用いた場合，その境界を明確に決めなければならないが，緩和された設計空間では難しい．したがって，領域 Ω^d と領域 $\Omega^D \setminus \Omega^d$ は同じ支配方程式で表す必要がある．例えば，Sigmund と Jensen [59] や，Dühring [25] は，図 6.2 に示すように，線形弾性体を等価な体積弾性率を有する圧縮性流体として扱い，音場の形態を最適化する手法を提案している．Yoon ら [23] は，図 6.3 に示すように，変位と圧力を変数にとる Mixed formulation を用いて，線形弾性体と空気を統一して表現している．Lee ら [29] [30] は，図 6.4 に示すように，多孔質材料の配置を最適化する問題において，空気を等価な多孔質体として近似的に表している．

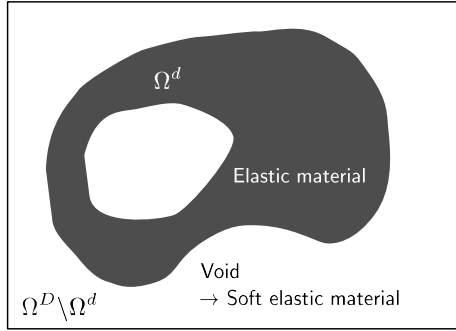


Fig. 6.1 Material representation based on elastic elements.

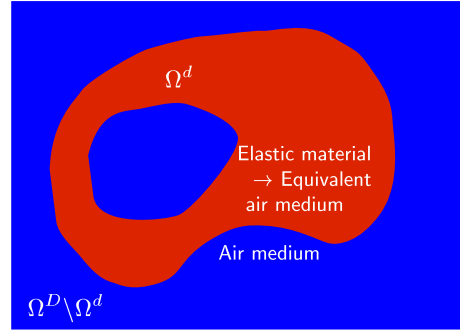


Fig. 6.2 Material representation based on acoustic elements.

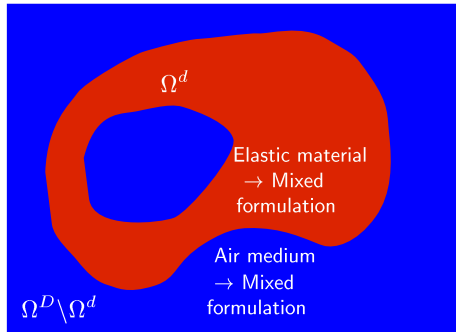


Fig. 6.3 Material representation using mixed formulation.

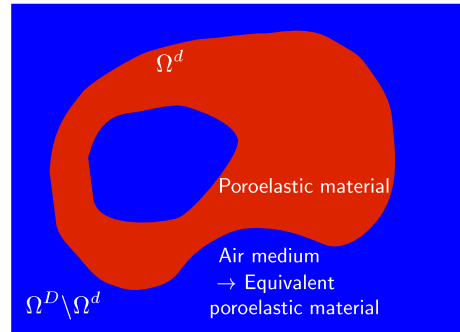


Fig. 6.4 Material representation based on poroelastic elements.

6.1.2 音圧応答レベルの低減を目的にした吸遮音構造物のトポロジー最適化

第1章で述べたように、吸遮音構造物は通常、複数の材料を積層させた構造になっている。各層の材料・厚さや、積層の順序により所望の性能を得るように設計するが、最も代表的なものは多孔質体層と、空気透過性のない多孔質体よりも密度が大きい弾性体表皮層を組み合わせた積層型の吸遮音構造である。この構造により、多孔質体層をバネ、弾性体表皮層をマスとした振動系を構成し、弾性体からなる構造物と組み合わせることによっていわゆる二重壁の効果を狙う。製造上の制約から、現在は多孔質体材料などを平面的に積層させた構造をしているが、この制約を取り払うと三次元的な構造を有する吸遮音構造物を設計することも可能である。

音圧応答レベルの低減を目的として、多孔質体と弾性体で構成される吸遮音構造物を対象に各材料の配置を最適化する場合、最適構造となるべき領域 Ω^d には二種類の媒質が存在することになる。さらに、前述したように、領域 $\Omega^D \setminus \Omega^d$ は空気の特徴を有する必要がある。ここで、Biot のモデルは線形弾

性体と流体の両方の性質を持っていることを考えると、弾性体は Biot のモデルにおいて、仮想的な特性値を設定し等価な多孔質体として近似的に表すことができる。また、Lee ら [29] [30] が提案しているように、空気についても等価な多孔質体として近似的に表すことができる。したがって、図 6.5 に示すように、領域 Ω^d と 領域 $\Omega^D \setminus \Omega^d$ を多孔質体の特性を表現する Biot の支配方程式で統一的に表すことができる。このように、音圧応答レベルの低減を目的とした吸遮音構造物のトポロジー最適化は複数の多孔質体材料の配置を最適化する問題として考えることができる。

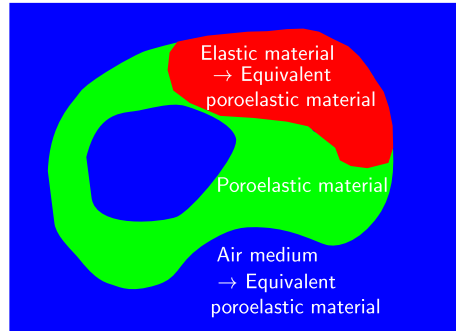


Fig. 6.5 Unified material representation based on poroelastic elements.

6.1.3 多孔質体の材料特性の補間表現

材料 0, 材料 1 という二つの材料からなる構造物のトポロジー最適化では、正規化された設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ が、 $\mu(\mathbf{x}) = 0$ のときに材料 0, $\mu(\mathbf{x}) = 1$ のときに材料 1 を表すように材料特性を補間表現する必要がある。なおかつ、最適化計算が収束した時には設計変数は固定設計領域 Ω^D のあらゆる点で 0 または 1 の値をとることが求められる。これは、設計変数が中間的な値 $0 < \mu(\mathbf{x}) < 1$ となるいわゆる「グレースケール」の領域が含まれる構造は、現実的には設計することができないからである。

密度法では、設計変数の中間的な値に対する材料特性にペナルティを与えることで、0 または 1 の値に近づくようにしている。すなわち静的な平均コンプライアンス最小化の問題では、材料の体積が $\mu(\mathbf{x})$ に比例するのに対し、 $\mu^p(\mathbf{x})$ ($p > 1$) という設計変数のべき乗を用いて弾性テンソルを表し、剛性にペナルティを与える。固有値の最大化を目的とした問題でも、Pedersen [60] は、固有値が剛性と慣性の比に依存することから、剛性にペナルティを設定している。Du と Olhoff [24] は、振動する構造物からの放射音を最小化する問題において、音圧応答レベルは弾性体の動的な剛性に依存することから、剛性と慣性にペナルティを与えている。一方、Sigmund と Jensen [59] は、音圧応答最小化の問題において、材料特性にはペナルティを与えずに、「グレースケール」のない解を得るため、Borrvall と Petersson [61] が提案した緩和関数を制約条件に加えている。

多孔質体からなる構造物のトポロジー最適化問題では、材料特性の補間表現およびペナルティの与え方は、まだ十分に検討されていない。Lee ら [29] は、Biot のモデルにおけるトーチュオシティなど多孔質体の微視構造に関連した物性値に対してペナルティを与えている。しかし、Biot のモデルにおいて

物性値は 9 個あり、最適化計算を安定して収束させ、かつ「グレースケール」がない解を得るために必要な物性値とペナルティ係数の大きさを選定するのは容易ではない。また、Lee ら [30] は、多孔質体の支配方程式 (2.158) において剛性項、慣性項および連成項にかかる係数を用いて材料の補間表現を試みている。しかし、それらの係数は、密度や剛性の等価的な表現であり、必ずしも物理現象を代表する材料特性にはなっていない。さらに、これらの係数にペナルティを与えず、前述した方法と同様に、Borrvall と Petersson が提案した緩和関数に重み係数をかけて目的関数に加えている。この場合、最適解は重み係数の大きさに依存するため問題に応じて適切な値を設定する必要がある。しかし、この値をアприオリに決めるのは難しい。

そこで、本研究では、多孔質体の巨視的な材料特性のうち物理現象を代表するものを用いて補間表現し、同時にペナルティを与える。すなわち多孔質体の場合、固体相の Lamé の定数 λ^s, μ^s 、体積弾性率 Q, R 、粘性減衰を考慮した密度 $\rho^{sc}, \rho^{fc}, \rho^{cc}$ およびポロシティ ϕ を設計変数のべき乗を用いて表す。二つの多孔質体材料から構造物の場合、添字 0, 1 で材料 0 および材料 1 を表し、 $\mu_1(\mathbf{x})$ を材料 1 に対する設計変数、 p_1, q_1, r_1 をそれぞれ剛性、密度およびポロシティに対するペナルティ係数とすると、材料特性の補間表現は次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
\lambda^s(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} \lambda_0^s + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} \lambda_1^s \\
\mu^s(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} \mu_0^s + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} \mu_1^s \\
Q(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} Q_0 + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} Q_1 \\
R(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} R_0 + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} R_1 \\
\rho^{sc}(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{q_1}\} \rho_0^{sc} + \mu_1(\mathbf{x})^{q_1} \rho_1^{sc} \\
\rho^{fc}(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{q_1}\} \rho_0^{fc} + \mu_1(\mathbf{x})^{q_1} \rho_1^{fc} \\
\rho^{cc}(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{q_1}\} \rho_0^{cc} + \mu_1(\mathbf{x})^{q_1} \rho_1^{cc} \\
\phi(\mu_1(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{r_1}\} \phi_0 + \mu_1(\mathbf{x})^{r_1} \phi_1
\end{aligned} \tag{6.2}$$

「グレースケール」がない最適構造を得るために、剛性に対するペナルティ係数 p_1 は 3 以上の値が適用される場合が多い。ここでも同様に $p_1 = 3$ を用いることとする。また、粘性減衰を考慮した密度に対するペナルティ係数 q_1 は、Du と Olhoff [24] の考え方にに基づき剛性に対する係数と同じ $q_1 = 3$ とする。ポロシティは多孔質体に特有の物性値で、ペナルティ係数 r_1 の設定方法についての検討例はない。ここでは、他のペナルティ係数と同じ $r_1 = 3$ とする。なお、本手法の妥当性を検証するために、静的な平均コンプライアンス最小化などの問題と同様に、 $q_1 = r_1 = 1$ とした場合の結果を比較検討する。

三つの多孔質体材料からなる構造物のトポロジー最適化についても同様の考え方が適用できる。添字 2 で材料 2 を表し、 $\mu_2(\mathbf{x})$ を材料 2 に対する設計変数、 p_1, p_2 を剛性、 q_1, q_2 を粘性減衰を考慮した密度、および r_1, r_2 をポロシティに対するペナルティ係数とすると、材料特性の補間表現は次式のよう

になる．

$$\begin{aligned}
\lambda^s(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{p_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} \lambda_0^s + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} \lambda_1^s] + \mu_2(\mathbf{x})^{p_2} \lambda_2^s \\
\mu^s(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{p_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} \mu_0^s + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} \mu_1^s] + \mu_2(\mathbf{x})^{p_2} \mu_2^s \\
Q(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{p_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} Q_0 + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} Q_1] + \mu_2(\mathbf{x})^{p_2} Q_2 \\
R(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{p_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} R_0 + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} R_1] + \mu_2(\mathbf{x})^{p_2} R_2 \\
\rho^{sc}(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{q_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{q_1}\} \rho_0^{sc} + \mu_1(\mathbf{x})^{q_1} \rho_1^{sc}] + \mu_2(\mathbf{x})^{q_2} \rho_2^{sc} \\
\rho^{fc}(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{q_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{q_1}\} \rho_0^{fc} + \mu_1(\mathbf{x})^{q_1} \rho_1^{fc}] + \mu_2(\mathbf{x})^{q_2} \rho_2^{fc} \\
\rho^{cc}(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{q_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{q_1}\} \rho_0^{cc} + \mu_1(\mathbf{x})^{q_1} \rho_1^{cc}] + \mu_2(\mathbf{x})^{q_2} \rho_2^{cc} \\
\phi(\mu_1(\mathbf{x}), \mu_2(\mathbf{x})) &= \{1 - \mu_2(\mathbf{x})^{r_2}\} [\{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{r_1}\} \phi_0 + \mu_1(\mathbf{x})^{r_1} \phi_1] + \mu_2(\mathbf{x})^{r_2} \phi_2
\end{aligned} \tag{6.3}$$

なお，ここでは簡単のため， $p_1 = p_2$ ， $q_1 = q_2$ ， $r_1 = r_2$ とする．

6.1.4 空気および弾性体に等価な多孔質体モデル

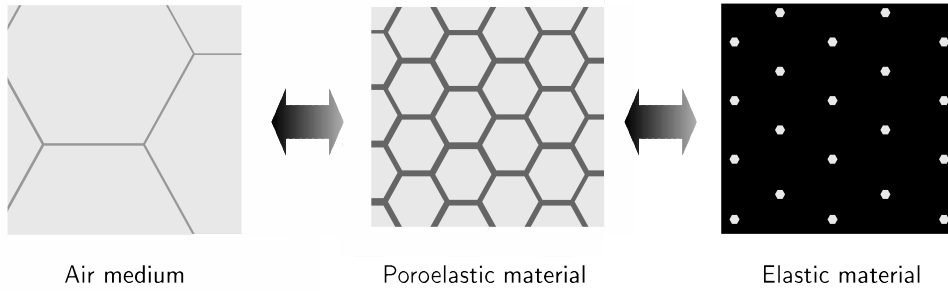


Fig. 6.6 Schematic representation of material interpolation using fictitious poroelastic material. The left and right diagrams represent a poroelastic material equivalent to air and an elastic material, respectively. The center diagram shows an actual poroelastic material.

吸遮音構造物において，固定設計領域内に存在する空気や構成要素の一つである弾性体は，前述したように等価な多孔質体として近似的に表す必要がある．ここでは，その具体的な表現方法を考える．

多孔質体の流路断面が非常に大きい場合，図 6.6 の左側に示すように，固体相の占める割合はゼロに近くなり，多孔質体は空気に近い特性となる．逆に，流路断面が非常に小さい場合，図 6.6 の右側に示すように，単位面積あたりの流路の数と同じであれば，空気体積の占める割合はゼロに近くなり，多孔質体は固体相の材料特性に近づくことが容易に分かる．実際の多孔質体の微視構造は非常に複雑で，空気の流路断面形状を取り扱うことは難しいため，Biot のモデルでは平均的な特性である断面係数として表している．材料の補間表現では，Lamé の定数，体積弾性率や密度など巨視的特性を用いるため，図 6.6 に示した微視的な構造の違いを巨視的特性の違いで表現し，空気および弾性体を等価な多孔質体

として表す.

Table 6.1 Characteristics for poroelastic materials equivalent to air and elastic material.

	Air	Elastic material
Porosity	≈ 1	≈ 0
Material of solid phase	$\approx \text{Air}$	Material to be represented
Viscous damping	No damping	Extremely large
Thermal dissipation	No dissipation (adiabatic air)	Fully dissipative (isothermal air)

まず, 空気の等価的な表現について考える. 流路断面が非常に大きく多孔質体の大部分が流体相で占められており, ポロシティ ϕ は 1 に限りなく近い値となる. ここでは 0.999999 とする. また, ヤング率や質量密度など固体相の全ての材料特性は空気と同等とする. 固体相と流体相の連成に関するトーチュオシティ α_∞ は, 固体相がほとんど存在しないことから 1 とする. なお, トーチュオシティはその定義から 1 以上の値をとり, 値が大きくなるにつれて二相間における慣性の連成が大きくなることに注意する. 固体相と流体相の境界面近傍で発生する粘性減衰力は, 空気の流路断面が大きい場合は無視できるため, $\sigma\phi^2 G$ は 0 となる. また, 空気は固体相への熱散逸はなく断熱的に変化すると考えられるため, その体積弾性率 K^f を γP_0 とする.

次に, 弾性体の等価的な表現について考える. 流路断面が非常に小さいため多孔質体の大部分が固体相で占められおり, ポロシティは 0 に限りなく近い値となる. ここでは 1.0×10^{-6} とする. また, 固体相の全ての材料特性は表現すべき弾性体の値に等しいとする. 比熱の大きい材料に囲まれた空気は周囲の材料が熱浴となり定温的に変化すると考えられることから, その体積弾性率を P_0 とする. また, Allard [18] が示しているように, 流路断面積が 0 の極限において G は 1 に収束する. さらに, 単位面積あたりの流路の数が変わらなければ, $\sigma\phi^2$ は流路断面の大きさに依らず常に一定となることも示している. これらを考慮すると, 流路断面積が 0 の極限においては $G = 1$ で σ は適当な多孔質体の $\sigma\phi^2$ の値に等しくなるように設定すればよい. 後の数値例の中で, これら等価的な表現が空気および弾性体と同じ応答特性を与えることを示す.

以上の等価的な表現は, Biot モデルにおいて仮想的な物性値を設定することでも同様の特性を表すことができる. これは汎用プログラムをソルバーとして利用する場合には有効である. 以下ではその具体的な設定方法を示す. まず密度および体積弾性率の中で用いている関数 G , G' の性質について調べる.

$$G = \left(1 + \frac{4j\omega\nu}{\Lambda^2} \frac{\rho^{f2}\alpha_\infty^2}{\sigma^2\phi^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad G' = \left(1 + \frac{j\omega\Lambda'^2}{16\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

G は $\frac{4\omega\nu}{\Lambda^2} \frac{\rho^{f2}\alpha_\infty^2}{\sigma^2\phi^2} \ll 1$ であれば次式で近似できる.

$$G \simeq 1 + \frac{2j\omega\nu}{\Lambda^2} \frac{\rho^{f2}\alpha_\infty^2}{\sigma^2\phi^2} \quad (6.5)$$

この場合、粘性減衰力に関する項は以下のように書ける.

$$\frac{\sigma\phi^2}{j\omega}G \simeq \frac{\sigma\phi^2}{j\omega} + \frac{2\nu\rho^{f2}\alpha_\infty^2}{\Lambda^2\sigma} \quad (6.6)$$

G' については $\frac{j\omega\Lambda'^2}{16\nu'} \gg 1$ であれば次式で近似できる.

$$G' \simeq \left(\frac{j\omega\Lambda'^2}{16\nu'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

このとき

$$\frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2}G' \simeq \left(\frac{64\nu'^2}{j^2\omega^2\Lambda'^4} \frac{j\omega\Lambda'^2}{16\nu'} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \left(\frac{4\nu'}{j\omega\Lambda'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 1 \quad (6.8)$$

の関係式が成立することを考慮すると、体積弾性率は次に示すように γP_0 と近似できる.

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2}G' \right\}^{-1}} \simeq \gamma P_0 \quad (6.9)$$

また、 G' は $\frac{j\omega\Lambda'^2}{16\nu'} \ll 1$ であれば次式で近似できる.

$$G' \simeq 1 + \frac{j\omega\Lambda'^2}{32\nu'} \quad (6.10)$$

このとき

$$\frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2}G' \simeq \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2} \left(1 + \frac{j\omega\Lambda'^2}{32\nu'} \right) = \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2} + \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2} \frac{j\omega\Lambda'^2}{32\nu'} = \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2} + \frac{1}{4} \gg 1 \quad (6.11)$$

の関係式が成立することを考慮すると、体積弾性率は次に示すように P_0 と近似できる.

$$K^f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{8\nu'}{j\omega\Lambda'^2}G' \right\}^{-1}} \simeq P_0 \quad (6.12)$$

以上の近似関係式を考慮すると空気を等価的に表現する場合、流体相の物性値を以下の関係式を満たすように設定すればよいことが分かる.

$$\sigma\phi^2 \ll 1 \quad (6.13)$$

$$\frac{\nu\rho^{f2}\alpha_\infty^2}{\Lambda^2\sigma} \ll 1 \quad (6.14)$$

$$\frac{\Lambda'^2}{16\nu'} \gg 1 \quad (6.15)$$

また、弾性体を等価的に表現する場合は、流体相の物性値を以下の関係式を満たすように設定すればよいことが分かる。

$$\sigma\phi^2 = c \quad (6.16)$$

$$\frac{\nu\rho^{f^2}\alpha_\infty^2}{\Lambda^2\sigma} \ll 1 \quad (6.17)$$

$$\frac{\Lambda'^2}{16\nu'} \ll 1 \quad (6.18)$$

なお、固体相の物性値はどちらの場合も先に述べた設定方法がそのまま適用できる。

6.1.5 最適化問題の定式化

弾性体構造物と閉空間音場からなる連成系について、付加する多孔質体を含む吸遮音構造物を対象周波数帯における閉空間音場内の音圧レベルを最小化するように設計する問題を考える。なお、固定設計領域 Ω^D は吸遮音構造物の配置が許容されうる領域に設定する。音圧レベルは音圧の二乗に関係することから、音場内に設定した評価領域 Ω^c における対象周波数範囲 $f_1 \leq f \leq f_2$ の音圧の二乗平均値を最小化する最適化問題として定式化する。また、人が音を評価する場合に適用される聴感特性などを考慮できるように、音圧応答には任意の周波数重み関数 $w(\omega)$ を含めておく。音場のポテンシャル関数 ϕ^a を音圧 p^a を用いて $p^a = -j\omega\phi^a$ で定義すると、 ρ_0 を空気の質量密度、 c_0 を空気中の音速として、目的関数 F は次式で表すことができる。

$$F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\int_{\Omega^c} \frac{\omega^2 w^2}{\rho_0 c_0^2} \phi^a \phi^{a*} d\Omega \right) d\omega \quad (6.19)$$

ここで、 $\omega_1 = 2\pi f_1$ 、 $\omega_2 = 2\pi f_2$ であり、 $*$ は共役複素数を表す。以上から、二つの多孔質体材料からなる構造物のトポロジー最適化問題は次式のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \underset{\mu_1}{\text{Minimize}} \quad & F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\omega d\omega \\ \text{Subject to} \quad & G_1 = V_1 - V_{10} \leq 0 \\ & \text{equilibrium equations} \\ & 0 \leq \mu_1(\mathbf{x}) \leq 1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

ここで、 V_1 は Ω^D における材料 1 の体積で次式で計算できる。

$$V_1 = \int_{\Omega^D} \mu_1(\mathbf{x}) d\Omega \quad (6.21)$$

なお、 V_{10} は材料 1 に関する体積制約の上限値である。

同様に、三つの多孔質体材料からなる構造物のトポロジー最適化問題は次式のように定式化できる．

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mu_1, \mu_2}{\text{Minimize}} \quad F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\omega d\omega \\
 & \text{Subject to} \quad G_1 = V_1 - V_{10} \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad G_2 = V_2 - V_{20} \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \text{equilibrium equations} \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq \mu_1(\mathbf{x}) \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq \mu_2(\mathbf{x}) \leq 1
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

ここで、 V_1 , V_2 はそれぞれ Ω^D における材料 1 および材料 2 の体積であり次式で求められる．

$$V_1 = \int_{\Omega^D} \{1 - \mu_2(\mathbf{x})\} \mu_1(\mathbf{x}) d\Omega \tag{6.23}$$

$$V_2 = \int_{\Omega^D} \mu_2(\mathbf{x}) d\Omega \tag{6.24}$$

なお、 V_{10} , V_{20} は材料 1 および材料 2 に関する体積制約の上限値である．

6.1.6 連続的な材料分布を仮定した設計空間の離散化

連続的な設計変数 $\mu(\mathbf{x})$ を固定設計領域 Ω^D において離散化近似するとき、設計対象が満たすべき平衡方程式を有限要素法により解くために設けられた離散化要素と併用するのが一般的である．離散化された設計変数を離散化近似における要素に割り当てる場合、設計変数の値は各要素内で一定値をとるとされることが多い．しかし、緩和された設計空間の連続性を表現するためには詳細な要素分割が必要となり、この要素分割をもって平衡方程式を解こうとすると、現実的な計算資源内には収まらないことが多分に推測される．さらにこの設定においては、最適解に材料が配置される要素と配置されない要素が一要素ごとに交互に並ぶいわゆる「チェッカーボード」が現れることが多い．「チェッカーボード」を含む解は現実的には最適構造にはなり得ず、Sigmund と Petersson [55] が指摘しているように、数値計算上の問題から発生している．この問題を抑制するために、Sigmund [22] はフィルタリング法、Haber [62] はペリメータコントロール法、また Niordson [63] は局所的な設計感度のコントロール法を提案している．しかし、フィルタリング法ではフィルタリングを行う領域の大きさや、ペリメータコントロール法では最適となるべき対象物の周長など、これらの手法に必要となるパラメーターを事前に適切に設定することは難しい．

こうした問題を抜本的に解決する手法として、Matsui と Terada [56]、あるいは Rahmatalla と Swan [57] は材料分布の連続性を仮定した設計空間の離散化手法（Continuous Approximation of Material Distribution, CAMD）を近年提案している．この手法では、設計変数 $\mu_i(\mathbf{x})$ ($i = 1$ または 2) を固定設計領域 Ω^D において C^0 以上の連続関数であると仮定し、設計変数を離散化要素の各節点に割り当て、内挿関数 $N_{tj}(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, \dots, n_d$) を構成要素とする関数ベクトル \mathbf{N}_t を用いて、次式のように

離散化する．

$$\mu_i(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu}_i = \sum_{j=1}^{n_d} N_{tj} \mu_{ij} \quad (6.25)$$

ここで、 $\boldsymbol{\mu}_i$ は各節点における離散設計変数を並べたベクトルで μ_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n_d$) はその構成要素、 n_d は離散設計変数の数を表す．なお内挿関数としては、本章で使用している四辺形一次要素の場合、 C^0 連続で最も簡単な双一次関数を用いるものとする．本研究においてもこの手法を適用している．

さて、目的関数の () 内をスペクトル F_ω において、平衡方程式を有限要素法により解くために設けた離散化要素を用いて設計空間を離散化すると次式となる．

$$F_\omega = -\omega^2 w^2 \boldsymbol{\Phi}_a^T \mathbf{M}_{a\Omega^c} \boldsymbol{\Phi}_a^* \quad (6.26)$$

ここで、 $\mathbf{M}_{a\Omega^c}$ は音場の質量マトリックス \mathbf{M}_a の各項において、評価領域 Ω^c に関する節点自由度に対応する項以外はゼロとしたマトリックスである．右辺にマイナス記号が入っているのは、 $\mathbf{M}_{a\Omega^c}$ が負の係数を含んでいるためであることに注意する．以上から、離散化された最適化問題は次式のように定式化できる．二つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする場合は、

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\mu_{1j}} \quad & F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\omega d\omega \\ \text{Subject to} \quad & G_1 = V_1 - V_{10} \leq 0 \\ & \text{equilibrium equations} \\ & 0 < \mu_{\min} \leq \mu_{1j} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n_d) \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$V_1 = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu}_1 d\Omega \quad (6.28)$$

ここで、 n_e は固定設計領域における要素数である．

同様に、三つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする場合は、

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\mu_{1j}, \mu_{2j}} \quad & F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\omega d\omega \\ \text{Subject to} \quad & G_1 = V_1 - V_{10} \leq 0 \\ & G_2 = V_2 - V_{20} \leq 0 \\ & \text{equilibrium equations} \\ & 0 < \mu_{\min} \leq \mu_{1j} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n_d) \\ & 0 < \mu_{\min} \leq \mu_{2j} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n_d) \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$V_1 = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} (1 - \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu}_2) \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu}_1 d\Omega \quad (6.30)$$

$$V_2 = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} \mathbf{N}_t^T \boldsymbol{\mu}_2 d\Omega \quad (6.31)$$

ただし, μ_{\min} は数値的な不安定性を回避するために設けた設計変数 μ_{ij} の下限値でここでは 1.0×10^{-6} としている.

6.1.7 最適化アルゴリズム

前節で定式化を行った最適化問題を解くための計算アルゴリズムを図 6.7 に沿って説明する. 最適化のステップ l において, まず設計変数 μ_{ij} の値から材料特性を算出し, 系が満たすべき平衡式を解く. 次に, 目的関数 F と固定設計領域 Ω^D における材料の体積 V_i を計算する. そして, 目的関数に対して収束判定を行い, 収束していれば終了となる. 収束していなければ, 目的関数 F と制約条件である体積 V_i の設計変数 μ_{ij} に関する設計感度を計算する. 最後に, Method of Moving Asymptotes (MMA) [58] により設計変数を更新し, ステップ $l \rightarrow l+1$ として繰り返し計算を行う.

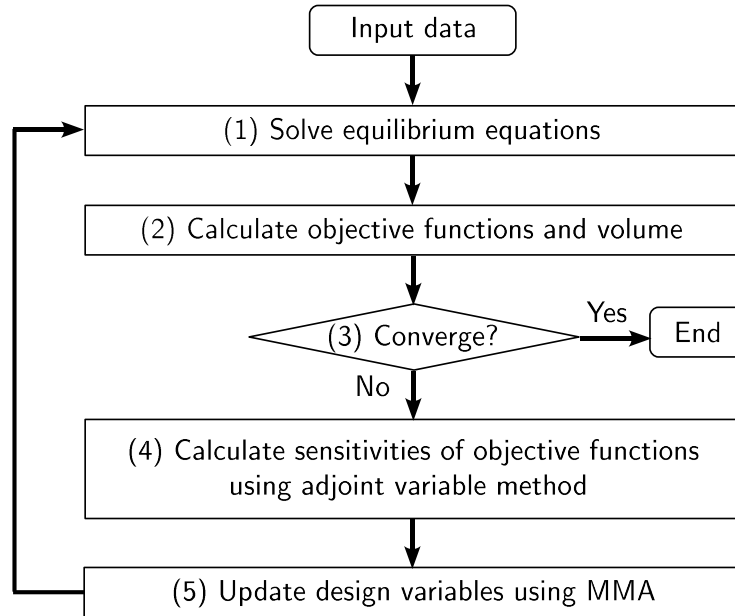


Fig. 6.7 Flowchart of optimization procedure.

6.1.8 目的関数の設計感度

MMA により設計変数の更新を行う場合には, 目的関数の設計変数に対する設計感度が必要となる. ここでは, 設計変数の数が多い場合でも効率の良い, 随伴変数法を用いて設計感度を求める.

今, 対象とする系の未知変数ベクトルを \mathbf{X} , 動剛性マトリックスを \mathbf{D} , 入力ベクトルを \mathbf{F} とすると, 次式の平衡方程式が成り立つ.

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (6.32)$$

ここで, \mathbf{Y} を系の随伴変数ベクトルとし, 系の平衡方程式が満たされていることに注意すると, 次式が

成り立つ.

$$F_\omega = F_\omega + \mathbf{Y}^T(\mathbf{F} - \mathbf{D}\mathbf{X}) + \mathbf{Y}^{*T}(\mathbf{F}^* - \mathbf{D}^*\mathbf{X}^*) \quad (6.33)$$

ここで, 両辺を設計変数 μ_i で微分し, \mathbf{F} が設計変数に依存せず一定とすると, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mu_{ij}} = \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \mu_{ij}} = \mathbf{O}$ であることから, 目的関数 F の設計変数 μ_{ij} に対する感度は次式となる.

$$\frac{dF_\omega}{d\mu_{ij}} = -\mathbf{Y}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu_{ij}} \mathbf{X} - \mathbf{Y}^{*T} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \mu_{ij}} \mathbf{X}^* + (\mathbf{G}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{D}) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mu_{ij}} + (\mathbf{G}^{*T} - \mathbf{Y}^{*T} \mathbf{D}^*) \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mu_{ij}} \quad (6.34)$$

ただし,

$$\mathbf{G} = \frac{\partial F_\omega}{\partial \mathbf{X}} \quad (6.35)$$

である. したがって随伴方程式

$$\mathbf{D}\mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad (6.36)$$

を満たす \mathbf{Y} を用いると, 目的関数 F の設計変数 μ_{ij} に対する感度は次式で求められる.

$$\frac{dF}{d\mu_{ij}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(-\mathbf{Y}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu_{ij}} \mathbf{X} - \mathbf{Y}^{*T} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \mu_{ij}} \mathbf{X}^* \right) d\omega \quad (6.37)$$

上式は静的な平均コンプライアンスの設計感度の表現式に似ているが, 左辺第二項で共役複素数の項が追加されることに注意する.

6.1.9 動剛性マトリックスの設計変数による微分

ここでは, 動剛性マトリックス \mathbf{D} の設計変数 μ_{ij} による微分 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu_{ij}}$ を計算する際に必要となる各材料特性の設計変数による微分についてまとめておく.

二つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする問題においては以下のようなになる.

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} \frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_{1j}} \frac{\partial \lambda^s}{\partial \mu_1} d\Omega = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_1 \mu_1^{p_1-1} (\lambda_1^s - \lambda_0^s) d\Omega \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \mu^s}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_1 \mu_1^{p_1-1} (\mu_1^s - \mu_0^s) d\Omega \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_1 \mu_1^{p_1-1} (Q_1 - Q_0) d\Omega \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_1 \mu_1^{p_1-1} (R_1 - R_0) d\Omega \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial \rho^{sc}}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} q_1 \mu_1^{q_1-1} (\rho_1^{sc} - \rho_0^{sc}) d\Omega \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} q_1 \mu_1^{q_1-1} (\rho_1^{cc} - \rho_0^{cc}) d\Omega \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} q_1 \mu_1^{q_1-1} (\rho_1^{fc} - \rho_0^{fc}) d\Omega \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} r_1 \mu_1^{r_1-1} (\phi_1 - \phi_0) d\Omega \quad (6.45)$$

また，線形的に補間する固体相の質量密度の設計変数による微分は次式となる．

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (\rho_1^s - \rho_0^s) d\Omega \quad (6.46)$$

補間した材料特性の関数となっているパラメータ $\tilde{\rho} = \rho^{sc} - \frac{\rho^{cc2}}{\rho^{fc}}$, $\alpha = \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right)$, $\tilde{\gamma} = \phi \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right)$ の設計変数による微分は連鎖律を用いて以下のように計算できる．

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \rho^{sc}}{\partial \mu_{1j}} - \frac{1}{\rho^{fc2}} \left(2 \frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{1j}} \rho^{cc} \rho^{fc} - \rho^{cc2} \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{1j}} \right) \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{1j}} \left(1 + \frac{Q}{R} \right) + \phi \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu_{1j}} R - Q \frac{\partial R}{\partial \mu_{1j}} \right) \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{1j}} \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right) + \phi \left\{ \frac{1}{\rho^{fc2}} \left(\frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{1j}} \rho^{fc} - \rho^{cc} \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{1j}} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu_{1j}} R - Q \frac{\partial R}{\partial \mu_{1j}} \right) \right\} \quad (6.49)$$

また，三つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする問題では，材料特性の補間表現の設計変数に

よる微分は上式と同じ考え方で求められる．例えば，Lamé の定数 λ^s は以下のようになる．

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_{1j}} \frac{\partial \lambda^s(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_{1j}} \frac{\partial \lambda^s(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} \quad (6.50)$$

$$= \frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_{1j}} \frac{\partial \lambda^s(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{p_2}) p_1 \mu_1^{p_1-1} (\lambda_1^s - \lambda_0^s) d\Omega \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial \mu_{2j}} = \frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_{2j}} \frac{\partial \lambda^s(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_{2j}} \frac{\partial \lambda^s(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} \quad (6.52)$$

$$= \frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_{2j}} \frac{\partial \lambda^s(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_2 \mu_2^{p_2-1} (\lambda_2^s - \lambda_{01}^s) d\Omega \quad (6.53)$$

ただし，材料特性につく添字 01 は，次式に示すように設計変数 μ_1 に対応する材料 0 と材料 1 の間で補間された材料特性であることを表している．

$$\lambda_{01}^s = \{1 - \mu_1(\mathbf{x})^{p_1}\} \lambda_0^s + \mu_1(\mathbf{x})^{p_1} \lambda_1^s \quad (6.54)$$

その他の材料特性についても，補間表現の設計変数による微分は同様に以下のように求められる．

$$\frac{\partial \mu^s}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{p_2}) p_1 \mu_1^{p_1-1} (\mu_1^s - \mu_0^s) d\Omega, \quad \frac{\partial \mu^s}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_2 \mu_2^{p_2-1} (\mu_2^s - \mu_{01}^s) d\Omega \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{p_2}) p_1 \mu_1^{p_1-1} (Q_1 - Q_0) d\Omega, \quad \frac{\partial Q}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_2 \mu_2^{p_2-1} (Q_2 - Q_{01}) d\Omega \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{p_2}) p_1 \mu_1^{p_1-1} (R_1 - R_0) d\Omega, \quad \frac{\partial R}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} p_2 \mu_2^{p_2-1} (R_2 - R_{01}) d\Omega \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial \rho^{sc}}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{q_2}) q_1 \mu_1^{q_1-1} (\rho_1^{sc} - \rho_0^{sc}) d\Omega, \quad \frac{\partial \rho^{sc}}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} q_2 \mu_2^{q_2-1} (\rho_2^{sc} - \rho_{01}^{sc}) d\Omega \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{q_2}) q_1 \mu_1^{q_1-1} (\rho_1^{cc} - \rho_0^{cc}) d\Omega, \quad \frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} q_2 \mu_2^{q_2-1} (\rho_2^{cc} - \rho_{01}^{cc}) d\Omega \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{q_2}) q_1 \mu_1^{q_1-1} (\rho_1^{fc} - \rho_0^{fc}) d\Omega, \quad \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} q_2 \mu_2^{q_2-1} (\rho_2^{fc} - \rho_{01}^{fc}) d\Omega \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2^{p_2}) r_1 \mu_1^{r_1-1} (\phi_1 - \phi_0) d\Omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} r_2 \mu_2^{r_2-1} (\phi_2 - \phi_{01}) d\Omega \quad (6.61)$$

また，線形的に補間する固体相の質量密度の設計変数による微分は次式となる．

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (1 - \mu_2) (\rho_1^s - \rho_0^s) d\Omega, \quad \frac{\partial \rho^s}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} (\rho_2^s - \rho_{01}^s) d\Omega \quad (6.62)$$

補間した材料特性の関数となっているパラメータの設計変数による微分は、二つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする場合と同様に次式のように計算できる。

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \rho^{sc}}{\partial \mu_{1j}} - \frac{1}{\rho^{fc2}} \left(2 \frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{1j}} \rho^{cc} \rho^{fc} - \rho^{cc2} \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{1j}} \right) \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu_{2j}} = \frac{\partial \rho^{sc}}{\partial \mu_{2j}} - \frac{1}{\rho^{fc2}} \left(2 \frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{2j}} \rho^{cc} \rho^{fc} - \rho^{cc2} \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{2j}} \right) \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{1j}} \left(1 + \frac{Q}{R} \right) + \phi \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu_{1j}} R - Q \frac{\partial R}{\partial \mu_{1j}} \right) \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_{2j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{2j}} \left(1 + \frac{Q}{R} \right) + \phi \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu_{2j}} R - Q \frac{\partial R}{\partial \mu_{2j}} \right) \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mu_{1j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{1j}} \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right) + \phi \left\{ \frac{1}{\rho^{fc2}} \left(\frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{1j}} \rho^{fc} - \rho^{cc} \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{1j}} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu_{1j}} R - Q \frac{\partial R}{\partial \mu_{1j}} \right) \right\} \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \mu_{2j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{2j}} \left(\frac{\rho^{cc}}{\rho^{fc}} - \frac{Q}{R} \right) + \phi \left\{ \frac{1}{\rho^{fc2}} \left(\frac{\partial \rho^{cc}}{\partial \mu_{2j}} \rho^{fc} - \rho^{cc} \frac{\partial \rho^{fc}}{\partial \mu_{2j}} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu_{2j}} R - Q \frac{\partial R}{\partial \mu_{2j}} \right) \right\} \quad (6.68)$$

6.1.10 制約条件の設計感度

制約条件である材料の体積の設計感度についてまとめる。これは以下のように容易に求めることができる。二つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする問題においては次式のように求められる。

$$\frac{\partial G_1}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} d\Omega \quad (6.69)$$

三つの多孔質体材料からなる構造物を対象にする問題においても、上式と同じ考え方で次式のように求められる。

$$\frac{\partial G_1}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} (1 - N_t^T \mu_2) N_{tj} d\Omega \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} -N_{tj} N_t^T \mu_1 d\Omega \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial \mu_{1j}} = 0 \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial \mu_{2j}} = \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\Omega_k^D} N_{tj} d\Omega \quad (6.73)$$

6.2 数値例による提案手法の検証

ここでは、簡単な系を対象に数値例を示し提案手法の有効性を検証する。

6.2.1 多孔質体を用いた一次元の最適設計例

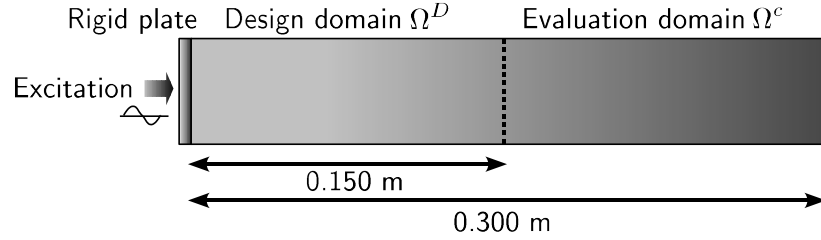


Fig. 6.8 One-dimensional acoustic tube model with rigid plate.

まず、剛板と一次元音響管を組合わせた系を対象とする．図 6.8 に示すように、長さ 0.300 m の音響管の一端に剛板を設け、単位周期加振力を与える．他端は剛壁境界条件が成り立つものとする．管全体のうち剛板を設置した側の 1/2 の領域を固定設計領域 Ω^D とし、他の 1/2 の領域を評価領域 Ω^c とする．なお、それぞれの領域を 60 要素、合計 120 要素で離散化近似する．多孔質体には表 3.1 に示す物性値を有するポリウレタンフォームを用いる．また、前節で述べた方法で空気を等価な多孔質体として表現する．なお、空気と等価な特性を示す仮想的な多孔質体の特性値を表 6.2 に併せて示しておく．

Table 6.2 Parameters for fictitious poroelastic materials equivalent to air and olefin sheet.

Parameters			Air	Olefin sheet
Young's modulus	E^s	[Pa]	0.142	1.75×10^8
Loss factor	η^s	[-]	0.0	0.205
Density	ρ^s	[kg/m ³]	1.225×10^{-6}	1790.
Poisson's ratio	ν^s	[-]	0.0	0.4
Porosity	ϕ	[-]	0.999999	1.0×10^{-6}
Tortuosity	α_∞	[-]	1.0	2.48
Flow resistivity	σ	[Ns/m ⁴]	6.59×10^{-2}	6.59×10^{16}
Viscous characteristic length	Λ	[m]	15.	3.71×10^{-8}
Thermal characteristic length	Λ'	[m]	15.	3.71×10^{-8}

図 6.9 に、ポリウレタンフォームの流体相の体積弾性率および粘性減衰を考慮した密度の周波数特性を示す．なお、実線が実数部、点線が虚数部である．低い周波数域では密度の虚数部、すなわち粘性減衰力が非常に大きいことが分かる．

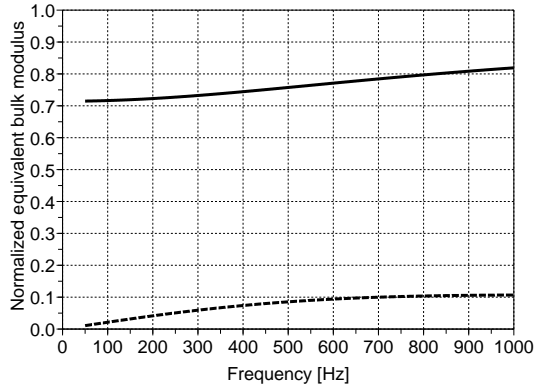
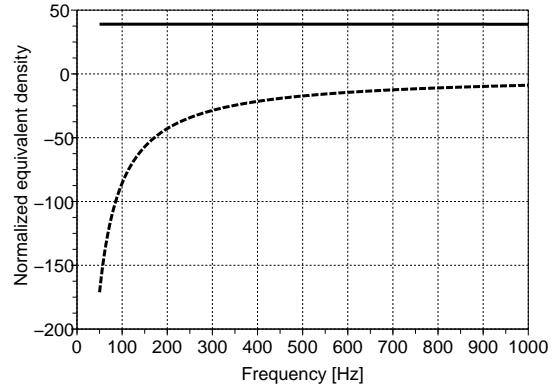
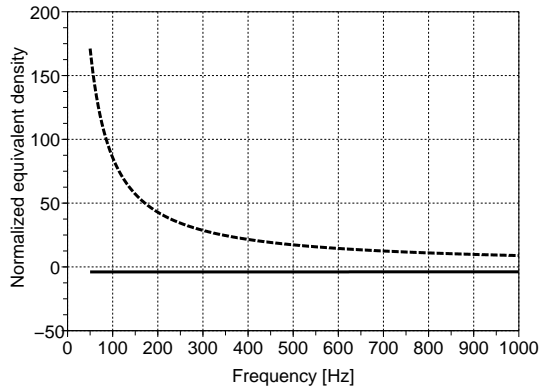
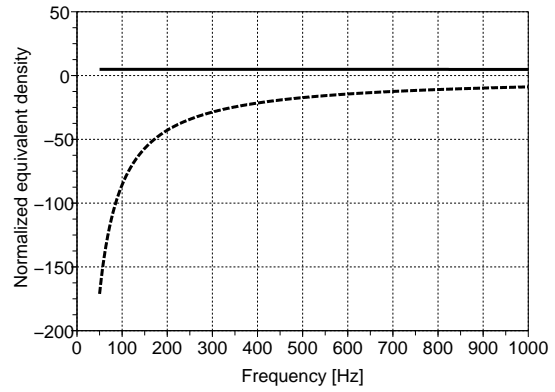
(a) Normalized equivalent bulk modulus $K^f / \gamma_0 P_0$ (b) Normalized equivalent density ρ^{sc} / ρ^f (c) Normalized equivalent density ρ^{cc} / ρ^f (d) Normalized equivalent density ρ^{fc} / ρ^f

Fig. 6.9 Equivalent bulk modulus and densities accounting for viscous damping and thermal dissipation. Solid and dashed lines correspond to real and imaginary parts, respectively.

図 6.10 の薄実線および点線はそれぞれ、固定設計領域 Ω^D が空気で充たされた場合と、空気と等価な多孔質体で充たされた場合の目的関数のスペクトルを示している。両者のスペクトルはよく一致しており、Biot のモデル上で空気を等価的に表せていることが確認できる。また、567 Hz に管の一次共鳴、1134 Hz には二次共鳴によるピークが見られる。

材料 0 を空気、材料 1 をポリウレタンフォームとし、ポリウレタンフォームの体積制約の上限 V_{10} を固定設計領域 Ω^D の 50% に設定する。なお、設計変数の初期値は、材料が一様に分布した状態を想定し、設計領域内の全ての節点 j において $\mu_{1j} = 0.5$ に設定する。また、対象周波数は、多孔質体を使用しない場合の管の共鳴周波数を考慮して、以下の 2 つに設定する。

(a) $f_1 = 300$ Hz, $f_2 = 900$ Hz

(b) $f_1 = 900$ Hz, $f_2 = 1500$ Hz

(a) および (b) はそれぞれ、音響管が空気で充たされている場合の一次または二次の共鳴周波数を含む

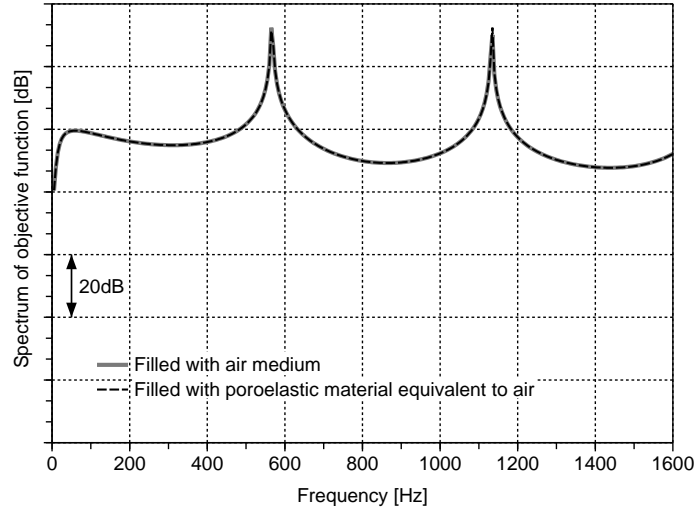


Fig. 6.10 Spectra of the objective function for one-dimensional model; the fixed design domain is filled with air (solid gray line) or poroelastic material equivalent to air (break line).

ように設定している.

なお, 自動車の車室内音場のように, 評価領域 Ω^c の内部において人が音を評価する場合を想定し, ここでは周波数重み関数 w に, 図 6.11 に示す人間の聴感特性を表現した A-特性 W_A [dB] を用いている. なお, 周波数 f における A-特性は近似的に次式で与えられる.

$$W_A[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left(\frac{1.007 f_2^2 f^2}{f^2 + f_1^2} \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{1.25 f^2}{\sqrt{(f^2 + f_3^2)} \sqrt{(f^2 + f_4^2)}} \right) \quad (6.74)$$

ここで, $f_1 = 20.6$, $f_2 = 12194.1$, $f_3 = 107.7$, $f_4 = 737.9$ である.

図 6.12 に, 提案する設計手法を適用した結果を示す. ただし, 黒い領域はポリウレタンフォームで, 白い領域は空気である. 「グレースケール」の領域は見られず, 明確なトポロジーが得られていることが分かる. 図 6.13 は初期状態における散逸パワーの分布で, 濃い領域で多くのパワーが散逸され, 減衰効果をもたらしていることを示す. 一次共鳴モードにおいては音響管の中央, 二次共鳴モードにおいては音響管の $1/4$ および $3/4$ の部分において粒子速度は最大となることから分かるように, この領域周辺で散逸パワーが大きくなっている. 図 6.12 (a) および (b) において, 同様の位置に多孔質体が配置されていることは, 散逸パワーが大きくなる位置の周辺に多孔質体を配置することが音圧レベルの低減に有効であることを示している. これは物理的な観点からも妥当な結果である.

また, 図 6.14 の実線および破線はそれぞれ, 図 6.12 (a) および (b) の場合における目的関数の周波数スペクトルを示している. なお, 薄実線は吸遮音構造物を用いず, 固定設計領域全体が空気で充たされている場合のスペクトルである. 図から, それぞれの対象とする周波数範囲において, スペクトルレ

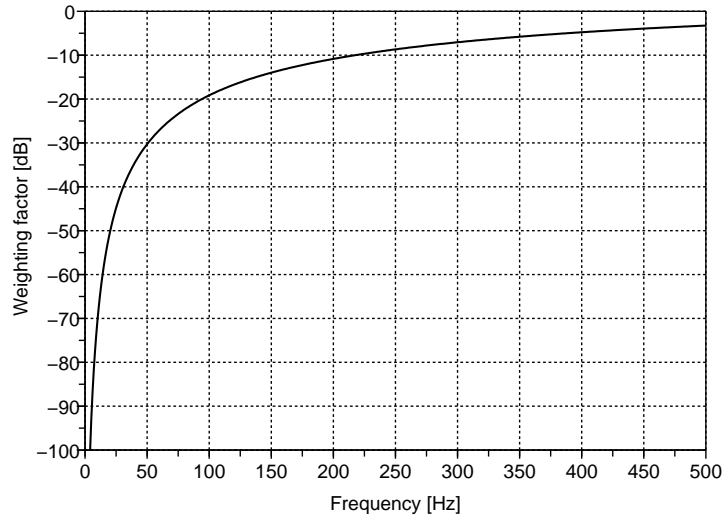


Fig. 6.11 A-weighting function.

(a) $f_1 = 300$ Hz, $f_2 = 900$ Hz(b) $f_1 = 900$ Hz, $f_2 = 1500$ Hz

Fig. 6.12 Optimal topology of polyurethane foam for one-dimensional model.

ベルを小さくできていることが分かる。

6.2.2 多孔質体と弾性体を用いた一次元の最適設計例

次に、吸遮音構造物の重要な構成要素である弾性体も含めた最適設計を考える。弾性体には、自動車の吸遮音構造物において汎用的に用いられているオレフィンシートを適用する。物性値は表 3.1 に示したとおりである。弾性体についても、空気の場合と同様に、Biot のモデルにおいて仮想的な物性値を設定し、多孔質体と同じ支配方程式を用いて表現する。

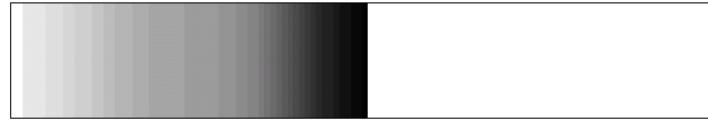
(a) $f_1 = 300 \text{ Hz}$, $f_2 = 900 \text{ Hz}$ (b) $f_1 = 900 \text{ Hz}$, $f_2 = 1500 \text{ Hz}$

Fig. 6.13 Distribution of the dissipated power at the initial state for one-dimensional model.

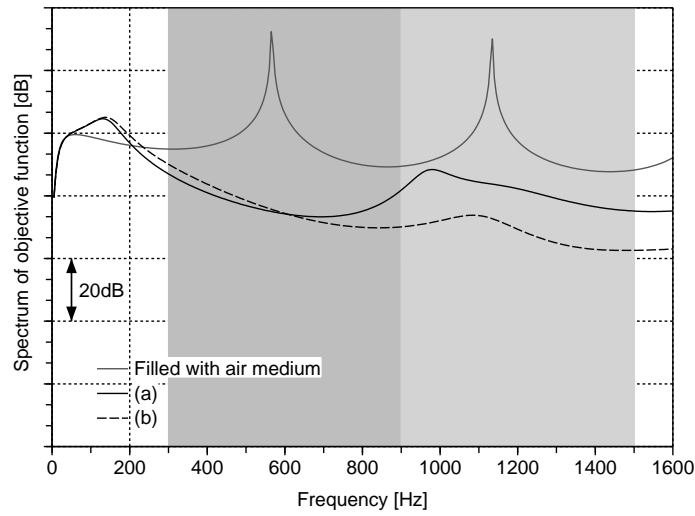


Fig. 6.14 Spectra of the objective function for the optimal topology of polyurethane foam for one-dimensional model.

材料 0 を空気，材料 1 を多孔質体であるポリウレタンフォーム，材料 2 を弾性体であるオレフィンシートとする．また，体積制約の上限値は，ポリウレタンフォームについては固定設計領域の体積の 50 %，オレフィンシートについては固定設計領域の体積の 6.7 % とする．設計変数の初期値は，材料が固定設計領域内で均一に分布した状態を想定し，設計領域内の全ての節点 j において $\mu_{1j} = 0.5$ ， $\mu_{2j} = 0.067$ に設定する．また周波数範囲については，前の問題と同じく以下のようにとる．

(a) $f_1 = 300 \text{ Hz}$, $f_2 = 900 \text{ Hz}$

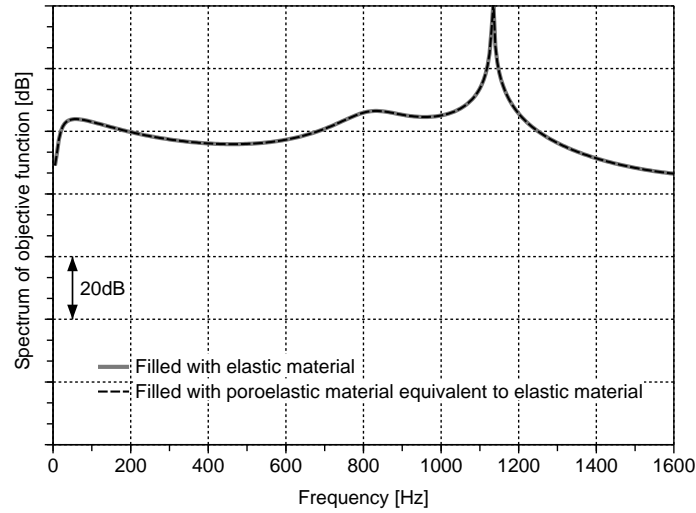


Fig. 6.15 Spectra of the objective function when the fixed design domain is filled with olefin sheet (solid gray line) or poroelastic material equivalent to olefin sheet (break line).

(b) $f_1 = 900$ Hz, $f_2 = 1500$ Hz

図 6.15 において、薄実線および点線でそれぞれ、固定設計領域が弾性体のオレフィンシートで充たされた場合、およびそれと等価な多孔質体で充たされた場合の応答を示す。両者はよく一致しており、Biot のモデル上で弾性体を等価的に表せていることが分かる。

図 6.16 (a) および (b) に、全てのペナルティ係数を 3 に設定した場合の最適化結果を示す。なお、青色の領域は空気、緑色の領域はポリウレタンフォーム、赤色の領域はオレフィンシートである。どちらの場合も水色の領域、すなわち設計変数の値が 0 と 1 の間の中間的な値となるいわゆる「グレースケール」の領域が見られる。一方、図 6.17 (a) および (b) は剛性および体積弾性率に関するペナルティ係数 p_1, p_2 を 6 に設定した場合の最適化結果である。どちらの場合も明瞭なトポロジーが得られていることが分かる。

また、図 6.18 の実線および破線で、図 6.17 (a) および (b) それぞれの場合における目的関数の周波数スペクトルを示す。なお、薄実線は吸遮音構造物を用いず、固定設計領域が空気で充たされている場合のスペクトルである。図から、それぞれの対象とする周波数範囲において、スペクトルレベルの積分値を小さくできていることが分かる。どちらの場合も、弾性体を配置することで音響管が区切られ共鳴周波数が変化し、また多孔質体を配置することで共鳴周波数域での減衰が大きくなっていることが分かる。

図 6.19 は、前述のようにペナルティ係数 q_1, q_2, r_1, r_2 の影響を検証するため $p_1 = p_2 = 6$, $q_1 = q_2 = 1, r_1 = r_2 = 1$ とした場合、すなわち、静的な平均コンプライアンス最小化の問題と同様に、

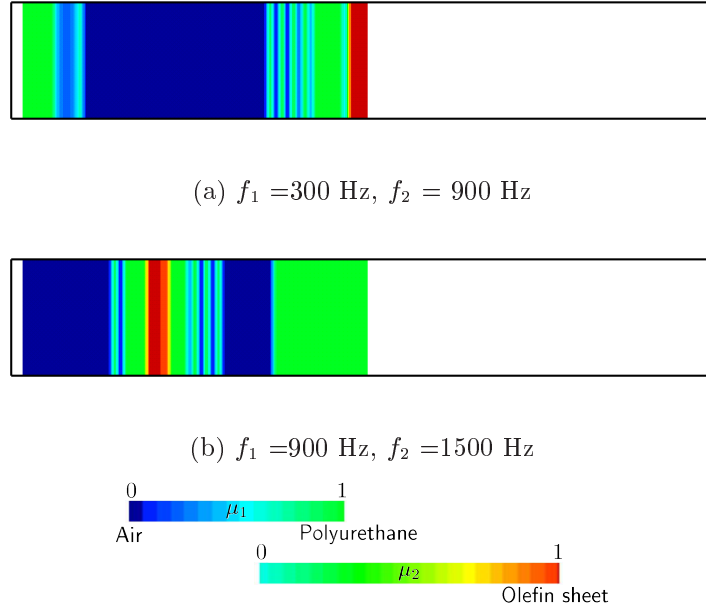


Fig. 6.16 Resultant topology of polyurethane foam and olefin sheet for one-dimensional model in cases (a) and (b) when all the penalization powers are set to 3.0.

剛性のみにペナルティを与えた場合の結果である．図から水色の領域，すなわち「グレースケール」の領域が多く含まれていることが分かる．したがって，明瞭な最適構造を得るためには，粘性減衰力を考慮した密度やポロシティにもペナルティを与える必要がある．

6.2.3 多孔質体を用いた二次元の最適設計例

次に，単位幅を有する平板と音場を組合わせた連成系を用いて検証を行う．ここでは図 6.20 に示すモデル (Model-1) を対象にする．長さ 0.360 m，厚さ 0.0012 m のスチール製平板の両端を固定し，その上に板と同じ長さで，高さ 0.107 m の音場を組合わせる．ただし，板との連成面以外の音場表面では剛壁境界条件が成り立つものとする．また，単位周期加振力を板の中央点において上下方向に与える．

吸遮音構造物は，多孔質体と弾性体の二材料から構成されるものとする．音場の下部の厚さ 0.030 m の領域を多孔質体が配置されうる固定設計領域 Ω^D とし，その上の一様な厚さ 0.002 m の領域に弾性体を配置する．なお，ここでは弾性体は設計対象外とする．そして，それ以外の音場領域を評価領域 Ω^e に設定する．離散化は系の対称性を考慮して全体の 1/2 の領域のみで行い，固定設計領域 Ω^D は 90×16 要素に分割する．

前節と同様に，多孔質体にはポリウレタンフォーム，弾性体にはオレフィンシートを適用する．材料 0 を空気，材料 1 をポリウレタンフォームとし，ポリウレタンフォームの体積制約の上限値 V_1 は，固定設計領域 Ω^D の 50 % の体積に設定する．設計変数の初期値は，材料が固定設計領域内で均一に分布した状態を想定し，設計領域内の全ての節点 j で $\mu_{1j} = 0.5$ に設定する．

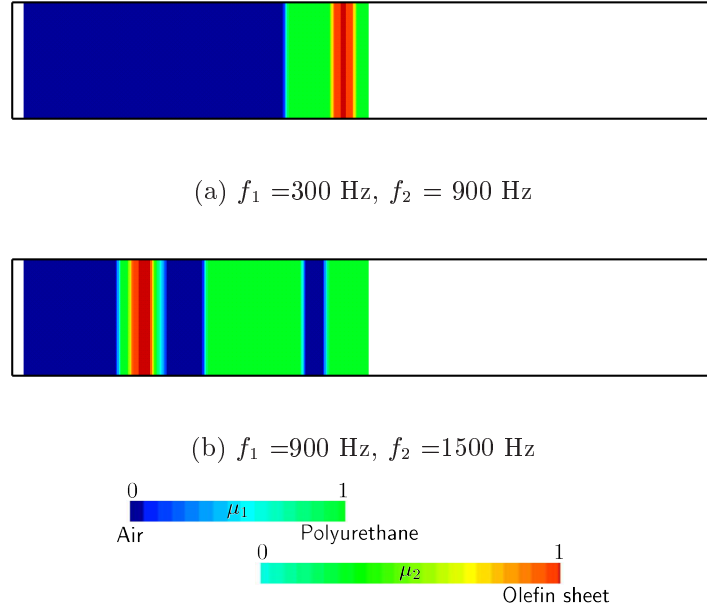


Fig. 6.17 Resultant topology of polyurethane foam and olefin sheet for one-dimensional model in cases (a) and (b) when the penalization powers p_1 and p_2 are raised to 6.0.

図 6.21 の薄実線で示すように、固定設計領域を空気で充たした場合には、70 Hz, 227 Hz, 309 Hz にスペクトルのピークが見られる．70 Hz と 309 Hz のピークは平板の固有周波数に起因するもので、227 Hz のピークはオレフィンシートをマス、固定設計領域内にある空気をバネとする共振に依るものである．また、黒実線で示すように固定設計領域をポリウレタンフォームで充たした場合は、64 Hz, 176 Hz, および 310 Hz にスペクトルのピークがシフトしている．これらのピークレベルを低減するため、最適化対象の周波数範囲として以下の二つを考える．

(a) $f_1 = 55 \text{ Hz}$, $f_2 = 85 \text{ Hz}$

(b) $f_1 = 85 \text{ Hz}$, $f_2 = 350 \text{ Hz}$

図 6.22 は初期状態における散逸パワーの分布であり、濃い領域で多くのパワーが散逸され、減衰効果をもたらしていることを示す．また、図 6.23 は先に設定した周波数範囲を対象に、提案する設計手法を適用した結果である．ただし、黒い領域がポリウレタンフォーム、白い領域は空気である．図から「グレースケール」の領域は見られず、明瞭なトポロジーが得られていることが分かる．また、初期状態において散逸パワーが大きい領域の周辺に多孔質体が集中して配置されている．

図 6.24 は図 6.19 と同様に、ペナルティ係数を $p_1 = 3$, $q_1 = r_1 = 1$ とした場合の結果である．この場合、設計変数の値が 0 と 1 の間の中間的な値となる「グレースケール」の領域が多く残っている．なお、周波数範囲は $f_1 = 55 \text{ Hz}$, $f_2 = 85 \text{ Hz}$ で、図 6.23 (a) と同じである．この結果からも、「グレースケール」の領域を含まない明瞭な最適構造を得るためには、粘性減衰を考慮した密度・ポロシティに

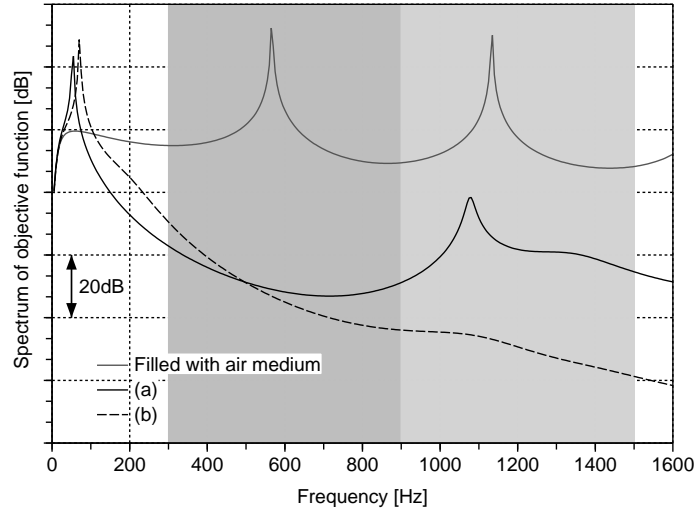


Fig. 6.18 Spectra of the objective function for the optimal topology of polyurethane foam and olefin sheet.

も 1 より大きいペナルティ係数を設定する必要がある。

図 6.25 の点線および実線はそれぞれ、図 6.23 (a) および (b) の場合における目的関数の周波数スペクトルを示す。それぞれの対象とする周波数範囲においてスペクトルレベルを低減できていることが確認できる。

さて、ここまでの数値例では空気を等価な多孔質体として表現し、実際の多孔質体であるポリウレタンフォームとあわせ、二つの多孔質体材料の最適配置を検討してきた。しかし、空気に等価な多孔質体に代えて実際の多孔質体材料を適用し、材料配置を最適化することもできる。ここでは、材料 0 をポリウレタンフォーム、材料 1 を圧縮フェルトとし、圧縮フェルトの体積制約の上限値 V_1 には、固定設計領域 Ω^D の 50 % の体積に設定する。設計変数の初期値は、材料が固定設計領域内で均一に分布した状態を想定し、設計領域内の全ての節点 j において $\mu_{1j} = 0.5$ に設定する。

図 6.26 は初期状態における散逸パワーの分布であり、色の濃い領域でより多くのパワーが散逸し減衰効果を発揮していることを示す。図 6.27 は上述した周波数範囲を対象にし、提案する最適設計手法を適用した結果である。ただし、黒い領域には圧縮フェルト、白い領域にはポリウレタンフォームが配置されている。この場合でも、「グレースケール」は見られず、明瞭なトポロジーが得られている。また、初期状態において散逸パワーが大きい領域の周辺に、圧縮フェルトが配置されている。これは圧縮フェルトがポリウレタンフォームよりも大きな空気流れ抵抗を有しており、大きな粘性減衰を発生させることが一因と考えられる。

図 6.28 の点線および実線で、図 6.23 (a) および (b) それぞれの場合における目的関数の周波数スペクトルを示す。この場合でも、それぞれの対象周波数範囲において、スペクトルレベルを抑えられていることが分かる。

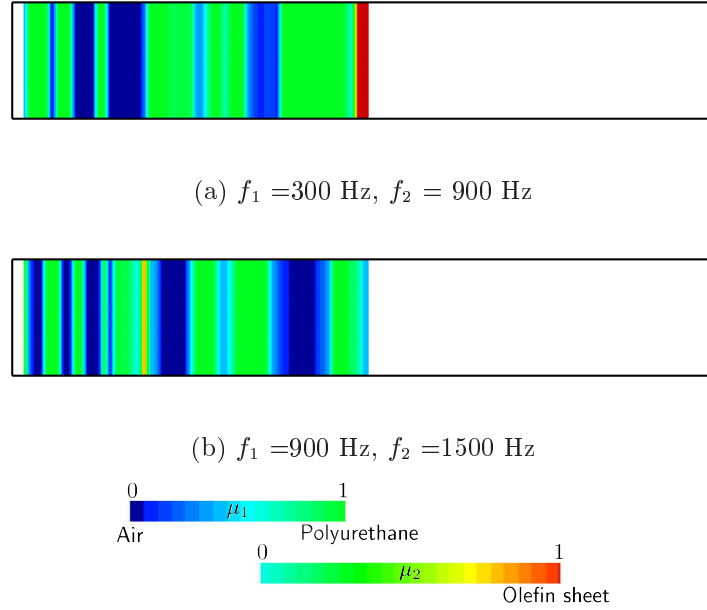


Fig. 6.19 Resultant topology of polyurethane foam and olefin sheet for one-dimensional model in cases (a) and (b) when the penalization powers q_1 , q_2 , r_1 and r_2 are set to 1.0.

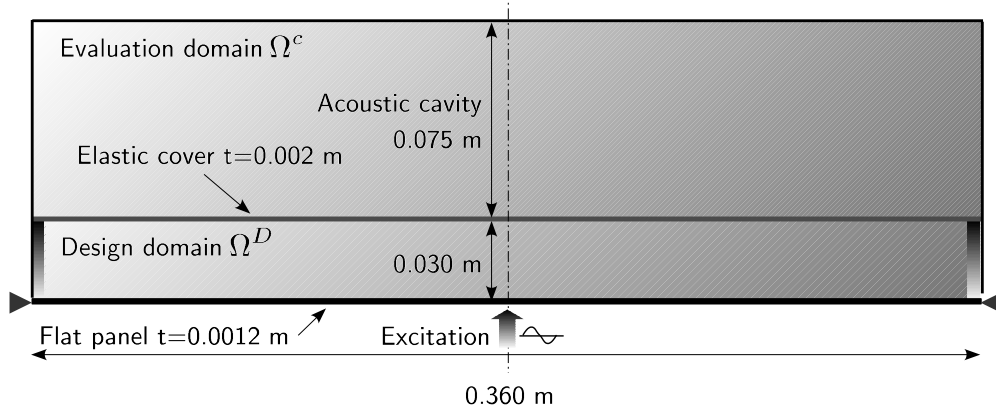


Fig. 6.20 Example Model-1 consisting of an elastic flat panel coupled with an acoustic cavity.

6.2.4 多孔質体と弾性体を用いた二次元の最適設計例

提案手法の有効性をさらに検証するため、弾性体も設計対象に含めたトポロジー最適化問題を考える。ここでは図 6.29 に示すモデル (Model-2) を対象にする。図 6.20 の Model-1 では弾性体は設計対象外であったのに対し、図 6.29 の Model-2 では固定設計領域 Ω^D に含んでいる点異なる。

空気と弾性体は仮想的な等価多孔質体として表現し、実際の多孔質体とあわせて三つの多孔質体材

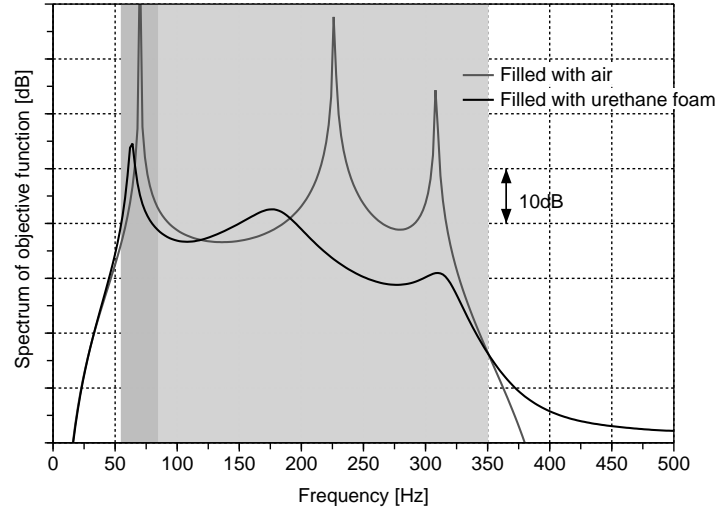
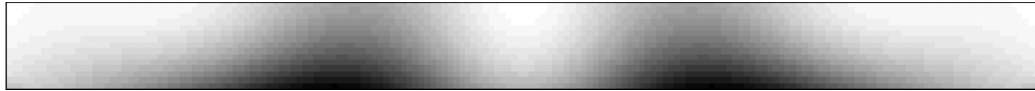


Fig. 6.21 Spectra of the objective function when design domain of Model-1 is filled with air.

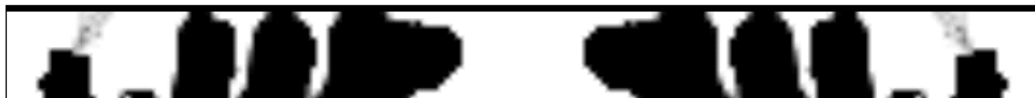


(a) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 85$ Hz



(b) $f_1 = 85$ Hz, $f_2 = 350$ Hz

Fig. 6.22 Distribution of the dissipated power for Model-1 at the initial state in cases (a) and (b).



(a) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 85$ Hz



(b) $f_1 = 85$ Hz, $f_2 = 350$ Hz

Fig. 6.23 Optimal topology of poroelastic material for Model-1 in cases (a) and (b).



Fig. 6.24 Resultant topology of poroelastic material for Model-1 in case (a) when penalization parameters q_1 and r_1 are set to 1.0.

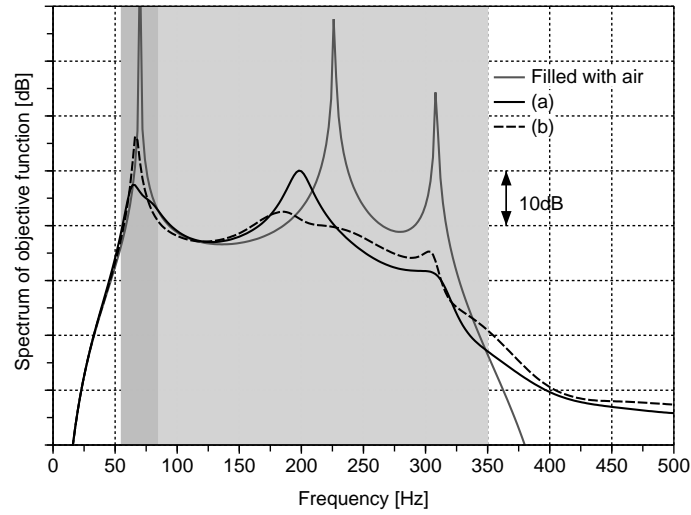


Fig. 6.25 Spectra of the objective function for Model-1 when optimal topology of poroelastic material is applied.



(a) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 85$ Hz



(b) $f_1 = 85$ Hz, $f_2 = 350$ Hz

Fig. 6.26 Distribution of dissipated power at initial state for Model-1 in cases (a) and (b) when polyurethane foam and compressed felt are applied as material 0 and 1, respectively.

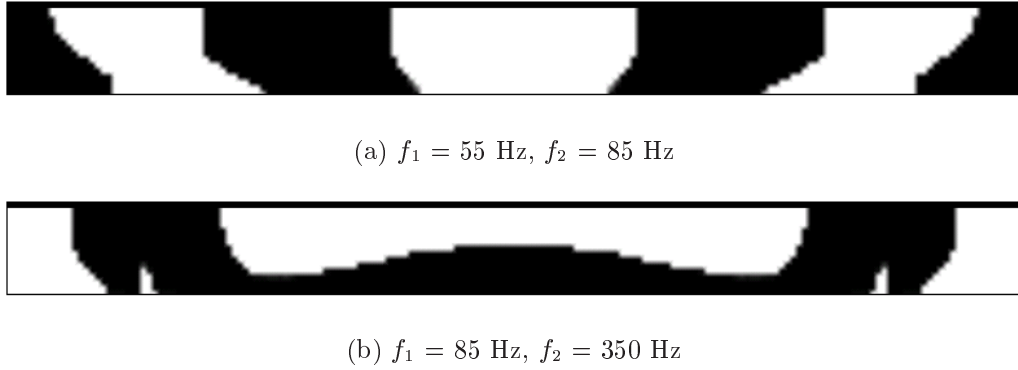


Fig. 6.27 Optimal topology of Model-1 in cases (a) and (b) when polyurethane foam and the compressed felt are applied as material 0 and 1, respectively. Blue areas correspond to polyurethane foam, red areas to compressed felt.

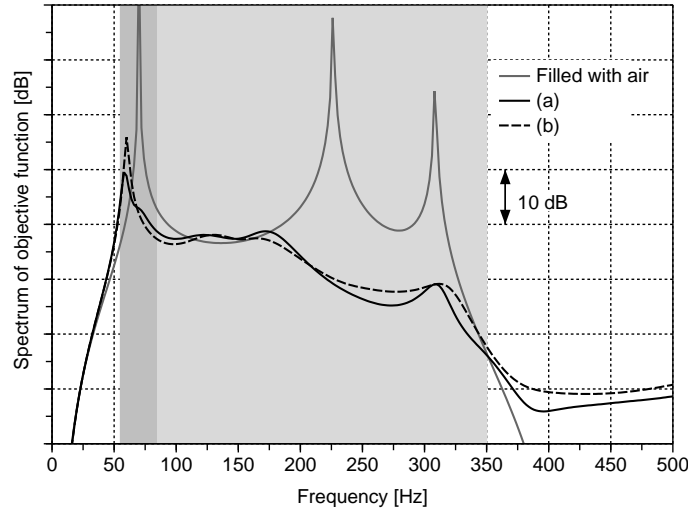


Fig. 6.28 Spectra of objective function for the optimal topology in Fig. 6.27. Solid and dashed lines respectively represent spectra in cases (a) and (b). Solid gray line shows spectrum when design domain is filled with air, for reference.

料についてのトポロジー最適化問題を考える．使用する材料は変わらず，多孔質体にはポリウレタンフォーム，弾性体にはオレフィンシートを適用する．材料 0 を空気，材料 1 をポリウレタンフォーム，材料 2 をオレフィンシートとし，体積制約の上限値は，ポリウレタンフォームについては設計領域の体積の 46.875%，オレフィンシートについては設計領域の体積の 6.25% とする．なお，これらの上限値は図 6.20 の Model-1 において固定設計領域 Ω^D の 50 % の体積のポリウレタンフォームおよび 0.002 m の一様な厚さのオレフィンシートと，それぞれ同じ体積となる．設計変数の初期値は，各材料が固定

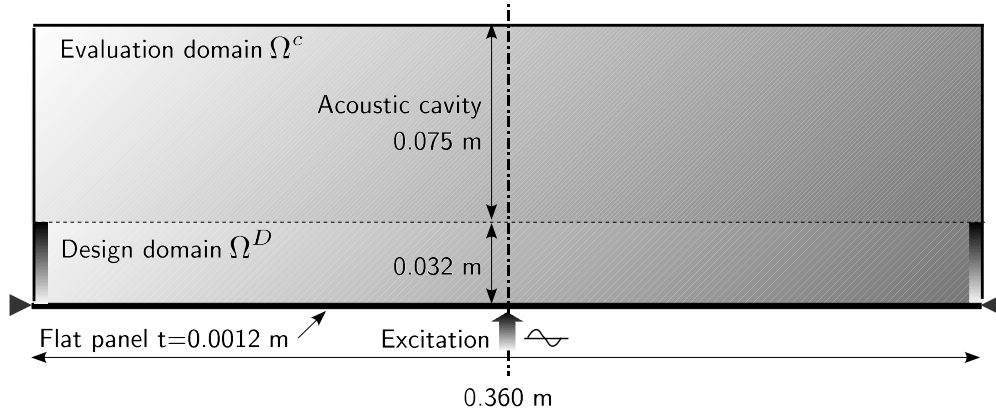


Fig. 6.29 Example Model-2 where the domain for the elastic cover of Fig. 6.20 is included in the fixed design domain.

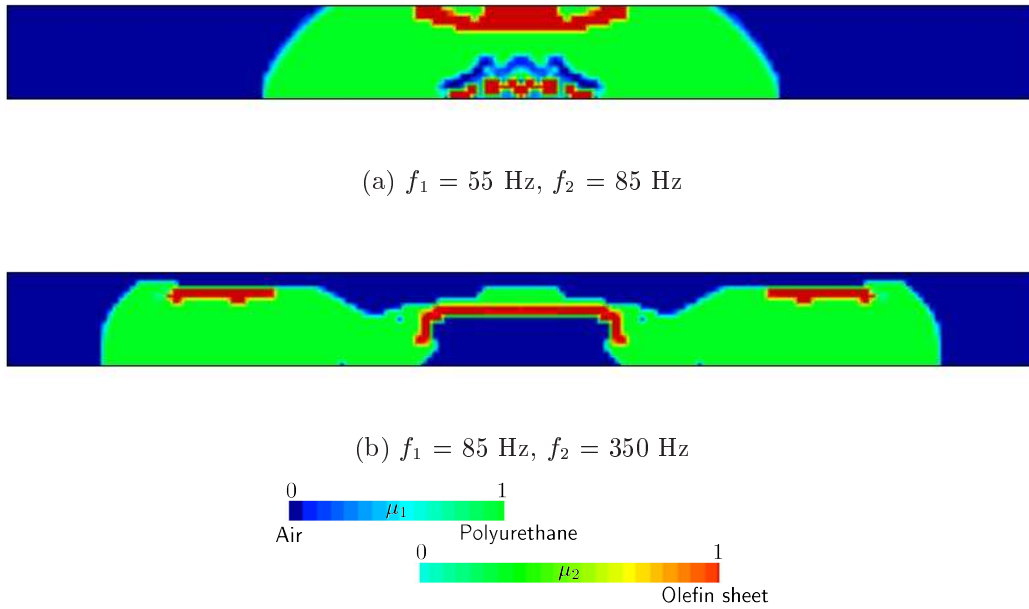


Fig. 6.30 Optimal topology of poroelastic material and elastic material for Model-2 in cases (a) and (b). Color bar at the bottom of the figure indicates interpolated material, with blue corresponding to air, green to polyurethane foam, and red to olefin sheet.

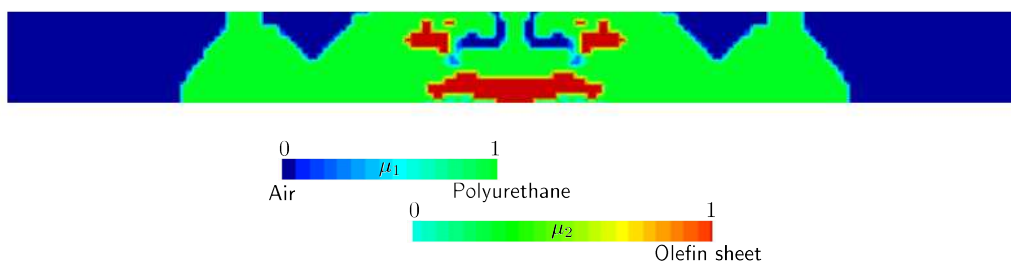


Fig. 6.31 Optimal topology for Model-2 in case (c) where target frequency ranges in cases (a) and (b) are unified. Color bar at the bottom of the figure indicates interpolated material, with blue corresponding to air, green to polyurethane foam, and red to olefin sheet.

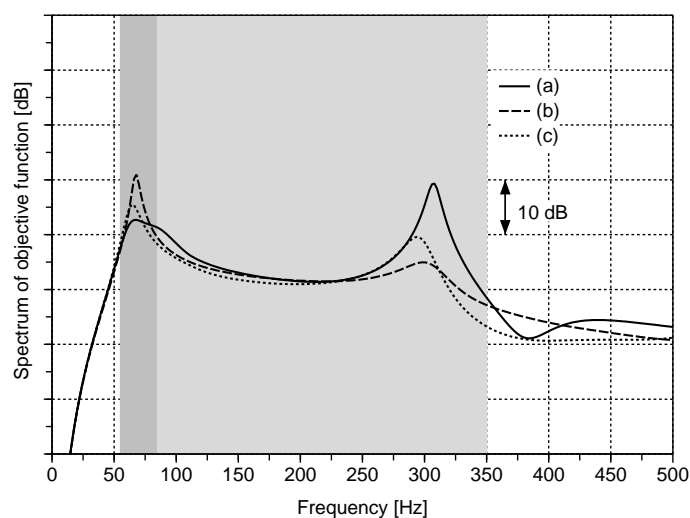


Fig. 6.32 Spectra of the objective function for Model-2 when optimal topology shown in Figs. 6.30 and 6.31 are applied.

設計領域内で均一に分布している状態を想定し，設計領域内の全ての節点 j において $\mu_{1j} = 0.46875$, $\mu_{2j} = 0.0625$ に設定する．また，対象周波数範囲は前節と同じく以下のように設定する．

(a) $f_1 = 55 \text{ Hz}$, $f_2 = 85 \text{ Hz}$

(b) $f_1 = 85 \text{ Hz}$, $f_2 = 350 \text{ Hz}$

図 6.30 に，各周波数範囲における最適なトポロジーを示す．青色の領域が空気，緑色の領域がポリウレタンフォーム，赤色の領域がオレフィンシートを表している．なお，ペナルティ係数は全て 3 に設定している．図からも分かるように「グレースケール」のない非常に明瞭な材料分布が得られており，本手法の有効性を示している．さらに，図 6.31 では対象周波数範囲を (c) $f_1 = 55 \text{ Hz}$, $f_2 = 350 \text{ Hz}$

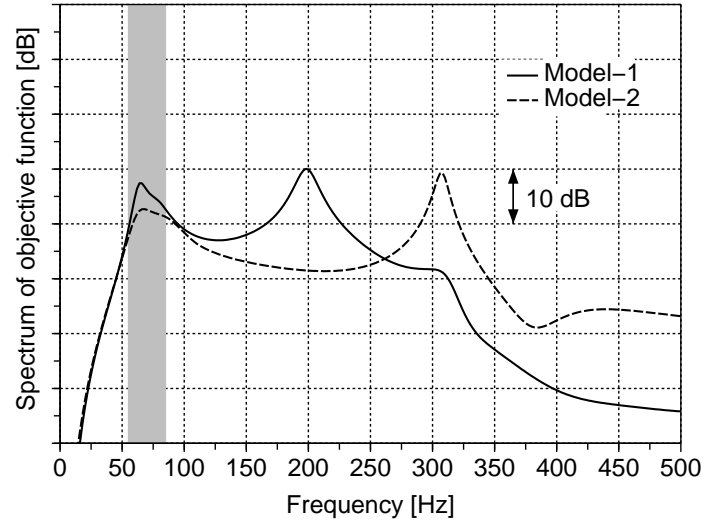
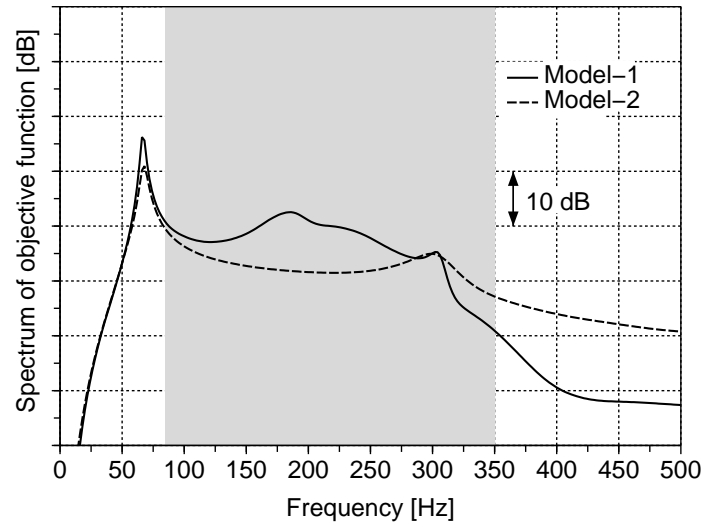
(a) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 85$ Hz(b) $f_1 = 85$ Hz, $f_2 = 350$ Hz

Fig. 6.33 The comparisons of spectra for objective function in cases (a) and (b), when air, polyurethane foam, and olefin sheet are applied. Solid and dashed lines respectively represent spectra for Model-1 and Model-2.

に設定した場合の結果である．周波数範囲 (a) および (b) の場合の結果と比べると，両者の中間的な材料配置になっている．図 6.32 では，実線，破線および点線で周波数範囲 (a)，(b) および (c) の最適化結果における目的関数の周波数スペクトルを示す．周波数範囲 (a)，(b) についてはそれぞれの対象とする周波数範囲において，スペクトルレベルの積分値をより小さくできている．また，周波数範囲 (c) については，(a) および (b) の場合と比べて中間のスペクトルレベルになっている．図 6.33 には，オレフィンシートを設計対象に含めた場合のスペクトルレベルへの効果を示す．すなわち，実線（Model-1）は弾性体のオレフィンシートを設計対象にしなかった場合で，破線（Model-2）は弾性体のオレフィンシートの設計対象に含め同時に最適化した場合である．対象周波数範囲 (a)，(b) のいずれにおいても Model-2 で示すスペクトルレベルのほうが小さい．

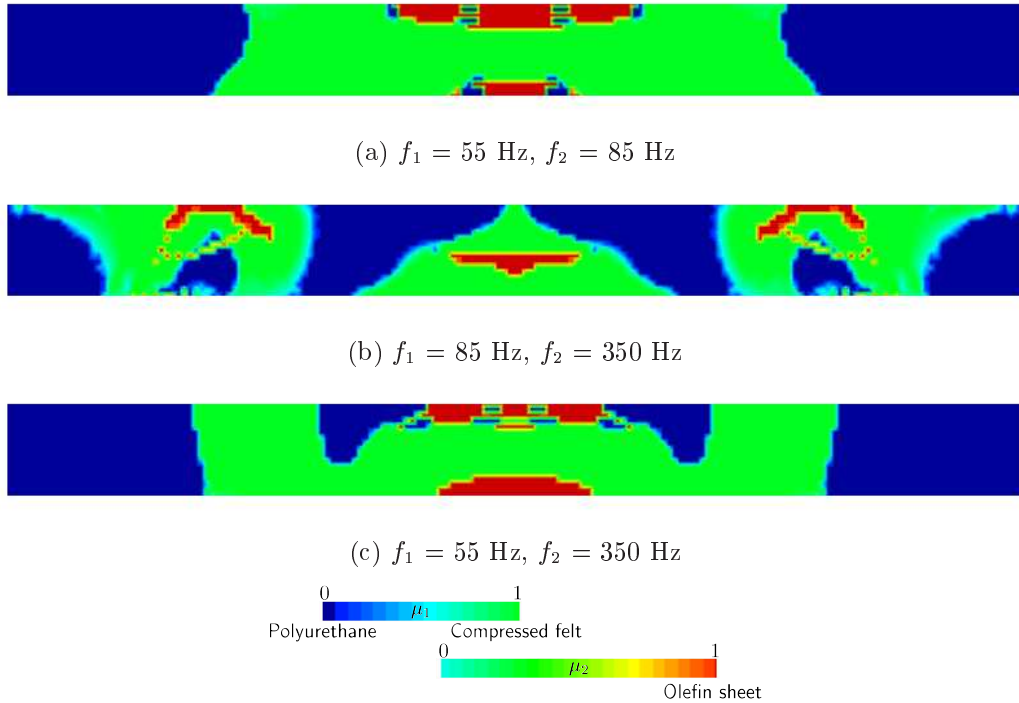


Fig. 6.34 Optimal topology for Model-2 in cases (a), (b) and (c) when polyurethane foam, compressed felt, and olefin sheet are respectively applied as material 0, 1, and 2. Color bar at the bottom of the figure indicates interpolated material, with blue corresponding to polyurethane foam, green to compressed felt, and red to olefin sheet.

前節でも述べたように，任意の二種の多孔質体材料を選んで最適な材料配置を検討することも可能である．材料 0 をポリウレタンフォーム，材料 1 を圧縮フェルト，材料 2 をオレフィンシートとし，体積制約の上限値は，圧縮フェルトについては設計領域の体積の 46.875%，オレフィンシートについては設計領域の体積の 6.25% とする．これらの上限値は 図 6.20 において固定設計領域 Ω^D の 50 % ずつの体積のポリウレタンフォームと圧縮フェルトおよび 0.002 m の一様な厚さを有するオレフィンシートの体積に相当する．設計変数の初期値は，材料が設計領域内で均一に分布した状態を想定し，設計領

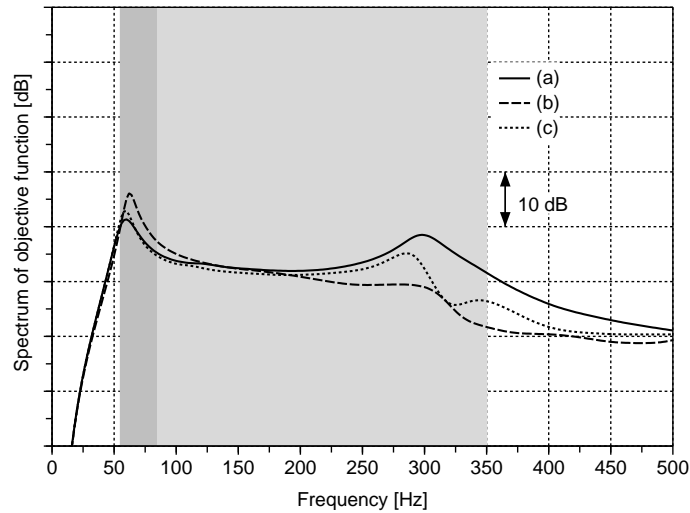


Fig. 6.35 Spectra of the objective function when the optimal topology shown in Fig. 6.34 is applied. Solid, dashed, and dotted lines respectively represent spectra in cases (a), (b) and (c).

域内の全ての節点 j において $\mu_{1j} = 0.46875$, $\mu_{2j} = 0.0625$ に設定する．対象周波数範囲は前の数値例に同じく以下のように設定する．

- (a) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 85$ Hz
- (b) $f_1 = 85$ Hz, $f_2 = 350$ Hz
- (c) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 350$ Hz

図 6.34 にそれぞれの対象周波数範囲において，最適なトポロジーを示す．青色の領域がポリウレタンフォーム，緑色の領域が圧縮フェルト，赤色の領域がオレフィンシートである．図からも分かるように「グレースケール」のない非常に明瞭な材料配置が得られており，本手法の有効性を示している．

図 6.35 では，実線・破線および点線で，周波数範囲 (a)・(b) および (c) の最適化結果における目的関数の周波数スペクトルを示す．周波数範囲 (a)・(b) についてはそれぞれの対象とする周波数範囲において，スペクトルレベルの積分値をより小さくできている．また，周波数範囲 (c) については，(a)・(b) の場合と比較して中間のスペクトルレベルになっている．

図 6.36 には，オレフィンシートを設計対象に含めた場合のスペクトルレベルへの効果を示す．実線 (Model-1) は弾性体のオレフィンシートを設計対象にしなかった場合で，一方，破線 (Model-2) は設計対象に含め同時に最適化した場合である．対象周波数範囲 (a) および (b) のいずれにおいても Model-2 で示すスペクトルレベルのほうが小さい．オレフィンシートも含めて同時に材料配置を検討したほうが，良い性能を備えた吸遮音構造物を創出できる可能性があることを示している．

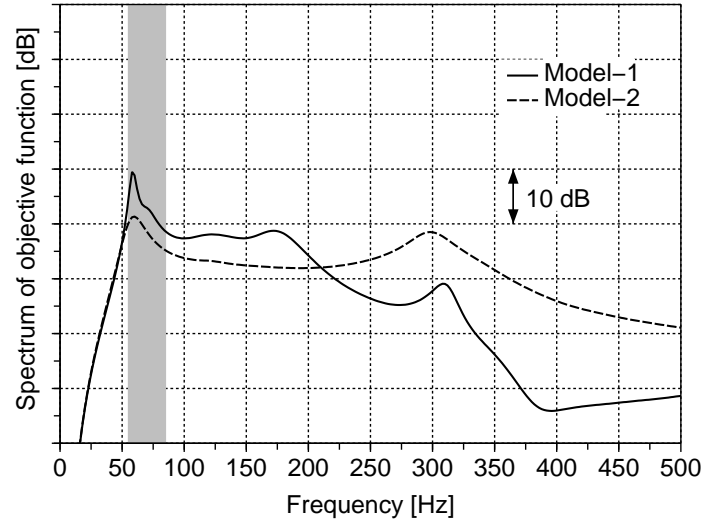
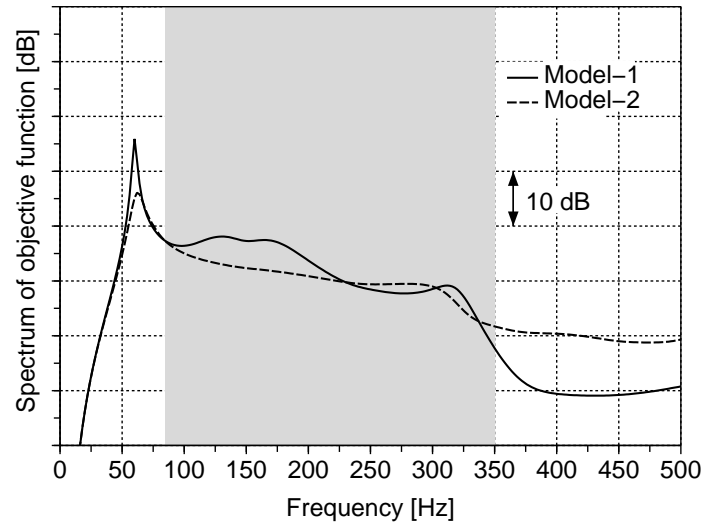
(a) $f_1 = 55$ Hz, $f_2 = 85$ Hz(b) $f_1 = 85$ Hz, $f_2 = 350$ Hz

Fig. 6.36 The comparisons of spectra for objective function in cases (a) and (b), when polyurethane foam, compressed felt, and olefin sheet are applied. Solid and dashed lines respectively represent spectra for Model-1 and Model-2.

6.3 まとめ

本章では、音圧応答レベルの最小化を目的とした多孔質体のトポロジー最適化手法を提案するとともに、簡単な数値例をもとに手法の有効性を検証した。得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 弾性体構造物と閉空間音場からなる連成系に、多孔質体を含む吸遮音構造物を組み合わせた系において、吸遮音構造物を設計対象にして、音圧応答レベルを最小化する新しいトポロジー最適化手法を構築した。
- (2) 音圧応答レベルの最小化を目的としたトポロジー最適化では、設計領域内に存在する空気を考慮する必要がある。Biot のモデルにおいて、空気は等価な多孔質体として近似的に表せることを示した。また、その等価な多孔質体を用いることで、空気と多孔質体を同一の支配方程式で表すことができ、従来の二材料を用いたトポロジー最適化の手法を応用できることを示した。
- (3) 吸遮音構造物の構成要素である弾性体についても、等価な多孔質体として近似的に表せることを示し、多孔質体と弾性体から構成される吸遮音構造物の最適設計も可能であることを示した。
- (4) 一次元および二次元のモデルを用いた数値例において得られた吸遮音構造物は、散逸パワーの大きい位置に多孔質体を配置して減衰効果を上げることにより、音圧レベルを低減していることを示した。

第 7 章

結論

本論文では、Biot のモデルを適用して多孔質体を含む吸遮音構造物の最適設計手法を構築した。本章では、論文全体としてのまとめと今後の関連する研究課題を示す。

7.1 本論文の総括

- (1) 構造と音場の境界面上にある多孔質体を含む積層型の吸遮音構造物について、一次元ヘルムホルツ方程式の解による伝達マトリックスを用いた新たな近似計算手法を提案した。提案手法は、計算の精度と時間をバランスさせ、実用上十分な精度を保ちつつ、計算時間は有限要素法による計算と比べて約 $1/40$ に短縮できることを確認した。
- (2) 伝達マトリックスを用いた近似計算手法を応用し、トポロジー最適化における密度法の考え方に基づき、音場の音圧レベルを最小とする最適な多孔質体の板厚分布を求める手法を新たに提案した。また、数値例により、構造の振動特性および音場の音響特性に応じた、物理的に妥当な板厚分布が得られることを確認した。
- (3) 音圧応答レベルの最小化を目的とした、多孔質体を含む吸遮音構造物のトポロジー最適化手法を新たに提案した。ここでは、設計領域内に存在する空気と吸遮音構造物の構成要素である弾性体を等価な多孔質体として表現し、複数の多孔質体材料の最適配置を求める手法とした。また、密度法により設計空間を緩和し、物理現象を代表する多孔質体の巨視的な材料特性を用いた補間表現も提案した。そして、一次元および二次元のモデルによる数値例で、いわゆる「グレースケール」のない明瞭な吸遮音構造物を創出できることを示し、提案手法が有効であることを確認した。

7.2 今後の展開と課題

- (1) 本論文では全て周波数領域での解析を基本とした。このため、最適化計算の目的関数に周波数に関する積分が含まれている場合、微小な周波数刻み間隔で計算を繰り返す必要があり、相当の計算時間を費やした。本論文で用いた例題よりも規模の大きい構造を対象にする場合には、応答の周波数軸に関する傾きなどをもとに周波数刻みを適宜変えたり、時間領域での計算に置き換えるなど、計算負荷を軽減する必要がある。
- (2) 設計対象は、吸遮音構造物のみに限定したが、吸遮音構造物に隣接する薄板構造パネルやそれに貼り付けられる制振材なども設計対象に含めることで、さらなる性能改善が期待できる。この場合、薄板構造パネルの平均コンプライアンスや固有振動数などの性能も、同時に考慮するべきであろう。複数の性能指標を線形結合させたものを目的関数として設定する必要があると考えられる。
- (3) 多孔質体の支配方程式として適用した Biot の理論では、微小な円管からなる微視構造を基点としているが、任意の微視構造とマクロな特性を関係づけることは考慮していない。したがって、均質化法のような考え方を導入することで多孔質材料の微視構造を設計し、従来の性能を超える材料を創出することも可能になると考えられる。

謝辞

本研究を遂行するにあたり，温かくご指導頂いた京都大学 大学院 吉村 允孝 教授に感謝の意を表します．同 西脇 眞二 准教授には，長きにわたり懇切丁寧なご指導，有益なご教示およびご支援を頂きました．ここに深く感謝の意を表します．また，このような研究の機会を与えて頂き，常に支援して下さいた日産自動車株式会社 丸山 新一 博士に厚く御礼申し上げます．そして，関連する発表論文執筆にあたり何度も英文を修正頂いた John. E. Goodman 先生に御礼申し上げます．最後に，最も身近で支えてもらった家族に感謝いたします．

参考文献

- [1] K. T. Cheng and N. Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, pp. 305 – 323, 1981.
- [2] H. He, J. Pan, and A. Luebke. From complex vehicle requirements to component design - A case study of sound package early development using sea genetic optimization and system engineering. *SAE Paper*, Vol. 2005-01-2434, , 2005.
- [3] A. Bermudez, J. Ferrin, and A. Prieto. Finite element solution of new displacement / pressure poroelastic models in acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 1914 – 1932, 2006.
- [4] T. Yamaguchi, Y. Kurosawa, and S. Matsumura. Finite element analysis for damping properties of sound-proof structures having solid body, porous media and air. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 69, pp. 34 – 41, 2003.
- [5] M. P. Bendsøe and N Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197 – 224, 1988.
- [6] K. Suzuki and N. Kikuchi. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 291 – 318, 1991.
- [7] A. R. Díaz and N. Kikuchi. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1487 – 1502, 1992.
- [8] Z. D. Ma, N. Kikuchi, and H. C. Cheng. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, pp. 259 – 280, 1995.
- [9] A. Iga, S. Nishiwaki, K. Izui, and M. Yoshimura. Topology optimization for thermal problems based on assumed continuous approximation of material distribution. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73, pp. 2426 – 2433, 2007.
- [10] T. Nomura, K. Sato, K. Taguchi, T. Kashima, and S. Nishiwaki. Structural topology optimization for the design of broadband dielectric resonator antennas using the finite difference time domain technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 71, pp. 1261 – 1296, 2007.

-
- [11] A. F. Seybert and D.F. Ross. Experimental determination of acoustic properties using a two-microphone random excitation technique. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 61, pp. 1362 – 1370, 1977.
 - [12] J. F. Allard, Y. Champoux, and J. Nicolas. Pressure variation above a layer of absorbing material and impedance measurement at oblique incidence and low frequencies. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 86, pp. 766 – 770, 1989.
 - [13] M. E. Delany and E. N. Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, Vol. 3, pp. 105 – 116, 1970.
 - [14] H. Utsuno, T. Tanaka, T. Fujikawa, and A. F. Seybert. Transfer function method for measuring characteristic impedance and propagation constant of porous materials. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 86, pp. 637 – 643, 1989.
 - [15] R. H. Lyon and G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 34, pp. 623 – 639, 1962.
 - [16] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 28, pp. 168 – 178, 1956.
 - [17] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 28, pp. 179 – 191, 1956.
 - [18] J. F. Allard. *Propagation of Sound in Porous Media*. Elsevier Applied Science, 1993.
 - [19] Y. J. Kang and J. S. Bolton. Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite elements. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 98, pp. 635 – 643, 1995.
 - [20] V. Easwaran, W. Lauriks, and J. P. Coyette. Displacement-based finite element method for guided wave propagation problems: Application to poroelastic media. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 100, pp. 2989 – 3002, 1996.
 - [21] N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 104, pp. 1444 – 1452, 1998.
 - [22] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization – Theory, Methods and Applications* –. Springer, 2003.
 - [23] G. H. Yoon, J. S. Jensen, and O. Sigmund. Topology optimization of acoustic-structure interaction problems using a mixed finite element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, pp. 1049 – 1075, 2006.
 - [24] J. Du and N. Olhoff. Minimization of sound radiation from vibrating bi-material structures using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 33, pp. 305 – 321, 2007.
 - [25] M. B. Dühring. Topology optimization for acoustic problems. In *IUTAM Symposium on Top-*

-
- logical Design Optimization of Structures, Machines and Materials*, Vol. 137, pp. 375 – 385, 2006.
- [26] M. B. Dühring, J. S. Jensen, and O. Sigmund. Acoustic design by topology optimization. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, pp. 557 – 575, 2008.
 - [27] E. Wadbro and M. Berggren. Topology optimization of an acoustic horn. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 420 – 436, 2006.
 - [28] J. S. Jensen and O. Sigmund. Systematic design of acoustic devices by topology optimization. In *Proceedings of Twelfth International Congress on Sound and Vibration (ICSV12)*, 2005.
 - [29] J. S. Lee, E. I. Kim, Y. Y. Kim, J. S. Kim, and Y. J. Kang. Optimal poroelastic layer sequencing for sound transmission loss maximization by topology optimization method. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 122, pp. 2097 – 2106, 2007.
 - [30] J. S. Lee, Y. Y. Kim, J. S. Kim, and Y. J. Kang. Two-dimensional poroelastic acoustical foam shape design for absorption coefficient maximization by topology optimization method. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 123, pp. 2094 – 2106, 2008.
 - [31] Y. Champoux and J. F. Allard. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, Vol. 70, pp. 1975 – 1979, 1991.
 - [32] D. L. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 176, pp. 379 – 402, 1987.
 - [33] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*. Dover, 1945.
 - [34] M. R. Stinson. The propagation of plane sound wave in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross sectional shape. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 89, pp. 550 – 558, 1991.
 - [35] Y. Champoux, M. R. Stinson, and G. A. Daigle. Air-based system for the measurement of porosity. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 89, pp. 910 – 916, 1991.
 - [36] M. R. Stinson and G. A. Daigle. Electronic system for the measurement of flow resistance. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 83, pp. 2422 – 2428, 1988.
 - [37] *ISO 9053:1991, Acoustics – Materials for acoustical applications – Determination of airflow resistance*.
 - [38] A Cummings. Sound propagaton in narrow tubes of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, pp. 27 – 42, 1993.
 - [39] W. Lauriks, P. Mees, and J. F. Allard. The acoustic transmission through layered systems. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, pp. 125 – 132, 1992.
 - [40] M. A. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, pp. 182 – 185, 1955.
 - [41] M. A. Biot and D. G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanic*, Vol. 24, pp. 594 – 601, 1957.

-
- [42] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 11, pp. 127 – 140, 1963.
- [43] N. Atalla, M. A. Hamdi, and R. Panneton. Enhanced weak integral formulation for the mixed (u, p) poroelastic equations. *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 109, pp. 3065 – 3068, 2001.
- [44] Y. Saad and H. A. van der Vorst. Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 123, pp. 1 – 33, 2000.
- [45] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193 – 202, 1989.
- [46] R. J. Yang and C. H. Chuang. Optimal topology design using linear programming. *Computers and Structures*, Vol. 52, pp. 265 – 275, 1994.
- [47] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 635 – 654, 1999.
- [48] M. Stolpe and K. Svanberg. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 22, pp. 116 – 124, 2001.
- [49] O. Sigmund and P. M. Clausen. Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1874 – 1889, 2007.
- [50] O. Sigmund. Design of multiphysics actuators using topology optimization part i: One-material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6577 – 6604, 2001.
- [51] O. Sigmund. Design of multiphysics actuators using topology optimization part ii: Two-material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6605 – 6627, 2001.
- [52] R. V. Kohn and M. Vogelius. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, pp. 333 – 350, 1984.
- [53] C. A. Soto and A. R. Díaz. On the modelling of ribbed plates for shape optimization. *Structural Optimization*, Vol. 6, pp. 175 – 188, 1993.
- [54] L. Tenek and I. Hagiwara. Optimal rectangular plate and shallow shell topology using thickness distribution or homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 115, pp. 111 – 124, 1994.
- [55] O. Sigmund and J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: a survey in procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, Vol. 16, pp. 68 – 75, 1998.

-
- [56] K. Matsui and K. Terada. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 1925 – 1944, 2004.
 - [57] S. F. Rahmatalla and C. C. Swan. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, pp. 130 – 135, 2004.
 - [58] K. Svanberg. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization –. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359 – 373, 1987.
 - [59] O. Sigmund and J. S. Jensen. Design of acoustic devices by topology optimization. In *Proceedings Of Fifth World Congress On Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO 5)*, 2003.
 - [60] N. L. Pedersen. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, pp. 2 – 11, 2000.
 - [61] T. Borrvall and J. Petersson. Topology optimization using regularized intermediate density control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 4911 – 4928, 2001.
 - [62] R. B. Haber, C. S. Jog, and M. P. Bendsøe. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*, Vol. 11, pp. 1 – 12, 1996.
 - [63] F. Niordson. Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 19, pp. 141 – 151, 1983.

関連学術論文

- [1] Glandier, C.Y., Yamamoto, T., Lehmann, R., and Kamada, Y., Vibro-acoustic FEA modeling of two layer trim systems, *SAE Paper* 2005-01-2325.
- [2] 山本 崇史, 丸山 新一, 構造・音響連成面上にある積層構造物のモデル化, 日本機械学会論文集 (C 編), 73 巻 730 号 (2007), pp. 1667 – 1675.
- [3] 山本 崇史, 丸山 新一, 西脇 眞二, 吉村 允孝, 構造・音場連成面上にある積層構造物の板厚最適化, 日本機械学会論文集 (C 編), 73 巻 734 号 (2007), pp. 2670 – 2677.
- [4] Yamamoto, T., Maruyama, S., Nishiwaki, S., and Yoshimura, M., Thickness Optimization for Multilayered Structures Located between a Structure and an Acoustic Cavity, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318 (2008), pp. 109 – 130.
- [5] 山本 崇史, 丸山 新一, 西脇 眞二, 吉村 允孝, 閉空間における音圧応答最小化を目的とした吸音材のトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 (C 編), 投稿中.
- [6] Yamamoto, T., Maruyama, S., Nishiwaki, S., and Yoshimura, M., Topology optimization of poroelastic structures to minimize mean sound pressure levels, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Submitted.

国際会議発表論文

- [1] Yamamoto, T., Maruyama, S., Nishiwaki, S., and Yoshimura, M., Thickness Optimization of a Multilayered Structure Located between a Structure and an Acoustic Cavity, *Proceedings of World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, A0237 (2007).
- [2] Yamamoto, T., Maruyama, S., Nishiwaki, S., and Yoshimura, M., Topology design of sound-proofed structure including poroelastic media, *Proceedings of 5th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, A0072 (2008).
- [3] Yamamoto, T., Maruyama, S., Nishiwaki, S., and Yoshimura, M., Topology optimization of

poroelastic structures to minimize mean sound pressure levels, *Proceedings of the ASME 2008 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, DETC2008-49582 (2008).

口頭発表論文

- [1] 山口 誉夫, 山本 崇史, 丸山 新一, Biot タイプ多孔質材をサンドイッチした二重壁構造の振動減衰特性の 2D FEM 解析, 制振工学会技術交流会, (2006).
- [2] 山口 誉夫, 山本 崇史, 丸山 新一, FEM による Biot タイプ多孔質材を含む積層構造の変形と振動減衰の解析, 機械力学・計測制御部門講演会講演論文集, (2006), pp. 388.
- [3] 山口 誉夫, 藤本 雅士, 山本 崇史, 丸山 新一, Biot タイプ多孔質材を含む自動車用内装構造の FEM 振動解析, 日本機械学会 第 20 回計算力学講演会, (2007).
- [4] 山本 崇史, 丸山 新一, 西脇 眞二, 吉村 允孝, 構造・音場連成面上にある積層構造物のモデル化, 日本機械学会年次大会, (2007).
- [5] 山本 崇史, 丸山 新一, 構造・音響連成面上にある多孔質材を含む積層構造物のモデル化について, 制振工学会技術交流会, (2007).
- [6] 山口 誉夫, 山本 崇史, 丸山 新一, 城田 育夫多孔質材と金属フレームを有する自動車用シート構造の振動音響特性の解析, 機械力学・計測制御部門講演会講演論文集, (2008).
- [7] 山本 崇史, 丸山 新一, 西脇 眞二, 吉村 允孝, 多孔質材料を含む吸遮音材構造のトポロジー最適化, 設計工学・システム部門講演会講演論文集, No. 3107, (2008).

受賞

- [1] 山本 崇史, 構造・音響連成面上にある積層構造物のモデル化の研究, 日本機械学会奨励賞 (研究), (2007).

特許

- [1] Glandier, C., Kamada, Y, and Yamamoto, T., INSULATING DEVICE AND ARRANGEMENT PROVIDED THEREWITH, WO/2007/019956, (2007).
- [2] Glandier, C., Kamada, Y, and Yamamoto, T., Dämmeinrichtung sowie Anordnung mit einer Dämmeinrichtung (剛性の高いパネルからの放射音を低減する遮音構造体), DE 10 2005 038 184 A1, (2005)
- [3] 中野 恒史, 荒川 聡, 山本 崇史, 塩崎 弘隆, 車両用フロアパネル, 特開 2004-210027 (特願 2002-379696).

索引

B

Biot 7

C

CAMD 89

G

Galerkin 34

H

Hashin-Shtrikman 20

M

MMA 62, 91

N

Navier 35

Navier-Stokes 9

R

RAMP 55

S

SIMP 55

T

Trefftz 34

あ

圧縮波 35

A-特性 98

円管内流れ 8

か

均質化法 53

Krylov 法 49

形状最適化 52

固定設計領域 53

さ

散逸エネルギー 33

弱形式 28

随伴変数ベクトル 92

随伴変数法 63, 91

寸法最適化 52

積層構造 34

せん断波 37

双一次関数 62

速度ポテンシャル 29

た

体積速度 67

代表長さ 17

断面係数 16

断面平均 12

チェッカーボード 61, 89

聴感特性 88

伝達マトリックス 34

等価体積弾性率 13

等価密度 13

トーチュオシティ 15

特性インピーダンス 38

特性関数 53

な

流れ抵抗 15

Navier の方程式 35

二重壁 82

は

微視構造 53

フィルタリング 89

ペナルティ係数 61, 66, 84

ペリメータコントロール 89

ヘルムホルツ方程式 35

ポロシティ 15

ま

密度法 54, 60